

Identificação biotápica dos parâmetros do modelo constitutivo de derivadas fraccionárias de materiais viscoelásticos

Margarida Vital Dias Fernandes

Dissertação do MIEM

Orientador: Prof. Doutor José Dias Rodrigues



**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Janeiro de 2013

Resumo

Nesta dissertação pretende-se investigar o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos integrados em estruturas com tratamentos superficiais, que constitui um meio de controlo passivo de vibração de elevada eficiência e com um vasto campo de aplicação. Assim, é desenvolvido um estudo numérico e experimental para a caracterização das propriedades destes materiais tendo em conta a sua dependência com a temperatura e frequência, através de uma representação conveniente do campo de deformações desenvolvido nas camadas dissipativas, bem como uma revisão teórica sobre materiais viscoelásticos, dando especial relevo à caracterização do módulo complexo e aos diferentes factores que o influenciam.

A modelação espacial da estrutura é realizada através do método de elementos finitos baseado na teoria *layerwise*. O elemento finito desenvolvido é verificado numericamente e validado experimentalmente em termos de funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade medidas para um conjunto de provetes representativos das configurações de tratamento integrado, nomeadamente, configurações *sandwich* em vigas do tipo encastrada-livre.

É proposto um método inverso de identificação das propriedades de materiais viscoelásticos com base na identificação dos parâmetros do modelo constitutivo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros. A representação do módulo complexo é realizada através de um processo de optimização dos parâmetros do modelo constitutivo, com base no ajustamento de funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade geradas numericamente a partir do elemento finito desenvolvido, e experimentais, medindo-se a resposta numa dada secção da viga e a excitação passiva aplicada na extremidade encastrada para um conjunto de frequências discretas definidas pelo utilizador, situadas nas ressonâncias da banda em análise. Os resultados são validados através da correlação entre as funções transmissibilidade, obtida a partir de um indicador de correlação.

É levado a cabo um estudo sobre o processo de optimização implementado e são desenvolvidos diversos algoritmos de identificação com o intuito de eliminar alguns factores que possam influenciar o processo de identificação tornando, assim, o método de identificação proposto mais eficiente e robusto. Ainda na perspectiva de melhorar o processo de identificação, é desenvolvida uma análise de sensibilidades das propriedades de materiais viscoelásticos para o modelo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros, através da definição de sensibilidades baseadas nas derivadas parciais das propriedades com respeito aos parâmetros do modelo constitutivo, e de um estudo sobre a variação do módulo de ganho, do factor de perda e dos parâmetros do modelo constitutivo durante o processo de identificação. É ainda desenvolvida uma análise multiressonância e multifunção através da comparação de funções transmissibilidade determinadas em várias secções do provete, considerando diferentes ressonâncias ao longo da banda de frequências em análise.

Os algoritmos desenvolvidos conduziram a uma melhoria significativa na identificação dos parâmetros do modelo constitutivo e, conseqüentemente, na caracterização das propriedades de materiais viscoelásticos, com resultados consistentes ao longo de toda a banda de frequências considerada, permitindo eliminar a influência de determinados factores no processo de identificação, em particular, a estimativa inicial dos parâmetros do modelo constitutivo.

Abstract

This dissertation aims to investigate the dynamic behavior of viscoelastic materials integrated into structures with surface treatments, providing a means of high efficiency passive control of vibration with a wide field of application. Thus, is developed a numerical and experimental study to characterize the properties of these materials in view of its dependence on temperature and frequency, through an appropriate representation of the strain field developed in the dissipative layers. A theoretical review on viscoelastic materials is presented, with special emphasis on characterization of the complex modulus and the various factors influencing it.

The spatial modeling of the structure is performed using the finite element method based on the multilayer *layerwise* theory. The finite element developed is verified numerically and experimentally validated in terms of frequency response functions of type transmissibility measured for a set of samples representing the integrated treatment settings, namely, the *sandwich* configuration of cantilever beams.

The inverse method for identification of the properties of viscoelastic materials proposed is based on the identification of the fractional-derivative-model parameters given by the fractional-derivative-model of four parameters. The representation of the complex modulus is performed through an optimization process of the parameters, by adjusting the frequency response functions of type transmissibility numerically generated through the finite element developed, and experimentally measured, in which case, the response at a given section of the cantilever beam and the passive excitation applied to the recessed end are measured for a set of discrete frequencies defined by the user, located within the vicinity of the resonances of the band under consideration. The results are validated by the correlation between the transmissibility functions, obtained through a correlation indicator.

A study of the optimization process implemented is carried on, and various identification algorithms are developed in order to eliminate some factors that may influence the identification process, thus making the proposed method of identification more efficient and robust. In order to improve the identification process, it is also developed a sensitivity analysis of the properties of viscoelastic materials by defining sensitivities based upon the properties partial derivatives with respect to the model parameters, and a study on the variation of the gain module, the loss factor and the constitutive model parameters during the identification process. It also developed a multiresonance and multifunction analysis based on the adjustment of the transmissibility functions determined in various sections of the sample, considering different resonances along the frequency band under analysis.

The algorithms developed led to a significant improvement in the identification of the model parameters and, hence, the characterization of the properties of viscoelastic materials, providing consistent results throughout the whole frequency band considered, allowing to eliminate the influence of certain factors in the identification process, in particular, the initial estimation of the fractional-derivative-model parameters.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha família, em particular à minha mãe, pelo incentivo e interesse que sempre demonstrou pelo progresso da minha vida académica e que sem a sua ajuda não teria sido possível.

Ao meu orientador, José Dias Rodrigues, agradeço pela possibilidade que me deu em desenvolver um trabalho numa área que desde cedo despertou o meu interesse, pela sua permanente disponibilidade e pelo incentivo demonstrado ao longo do semestre.

Agradeço, também, aos meus amigos, pelos momentos de descontração que me proporcionaram ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Tratamentos viscoelásticos	1
1.2 Configurações de tratamento viscoelástico	2
1.2.1 Tratamentos superficiais sem restrição	2
1.2.2 Tratamentos superficiais com restrição	2
1.2.3 Tratamentos integrados	3
1.3 Motivação	4
1.4 Objectivos	5
1.5 Estrutura da dissertação	5
2 Caracterização dos materiais viscoelásticos	7
2.1 Introdução	7
2.2 Ciclo de histerese para materiais viscoelásticos	7
2.3 Comportamento de materiais no domínio da frequência	8
2.3.1 Comportamento ideal de um material elástico	8
2.3.2 Comportamento viscoelástico	9
2.4 Módulo complexo	10
2.5 Efeito dos factores ambientais no módulo complexo	10
2.5.1 Efeito da temperatura	10
2.5.2 Efeito da frequência	11
2.5.3 Efeito das tensões cíclicas	12
2.5.4 Outros aspectos ambientais	13
2.6 Representação do módulo complexo	13
2.6.1 Princípio da correspondência frequência-temperatura	13
2.6.2 Nomograma de frequência-temperatura	14
2.7 Modelo constitutivo do material viscoelástico	15
2.8 Norma ASTM E 756-05	16
2.8.1 Descrição do método	16
2.8.2 Pressupostos	18
2.8.3 Montagem experimental	18

3	Método inverso de identificação	21
3.1	Introdução	21
3.2	Modelo de elementos finitos	21
3.3	Função de resposta em frequência numérica	23
3.4	Procedimento experimental	24
3.5	Frequências de controlo	26
3.6	Modelo constitutivo	27
3.7	Função de minimização	27
3.8	LAC - “ <i>Local Amplitude Criterion</i> ”	28
3.9	Descrição do processo	28
3.10	Provetes	31
3.10.1	Propriedades geométricas e materiais	31
3.10.2	Modelo de elementos finitos	31
3.10.3	Transmissibilidades a $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	32
4	Processo de optimização	35
4.1	Introdução	35
4.2	Frequências de controlo	35
4.2.1	Frequências de controlo com restrição da banda	37
4.3	Algoritmo G_0 G_{∞} α τ	38
4.3.1	Parâmetros do modelo constitutivo	38
4.3.2	Função de resposta em frequência/LAC/Propriedades do material	40
4.4	Algoritmos de identificação	42
4.4.1	Análise dos resultados	43
4.5	Algoritmos de identificação α τ - G_0 G_{∞} / G_{∞} α τ - G_0	45
4.5.1	Função de resposta em frequência e indicador local LAC	49
4.5.2	Propriedades do material viscoelástico	54
4.6	Estimativa dos parâmetros do modelo constitutivo	56
4.7	Conclusões	59
5	Análise de sensibilidades	61
5.1	Introdução	61
5.2	Modelo constitutivo e sensibilidades	61
5.2.1	Sensibilidades de $G(\omega)$	61
5.2.2	Sensibilidades de $\eta(\omega)$	62
5.2.3	Determinação das sensibilidades	64
5.2.4	Análise dos resultados	66
5.3	Variação de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$	67
5.4	Variação dos parâmetros do modelo constitutivo	75
5.5	Conclusões	77
6	Identificação multiressonância e multifunção	79
6.1	Introdução	79
6.2	Identificação multiressonância	79
6.3	Identificação multifunção	84
6.3.1	Identificação com duas funções transmissibilidade	84
6.3.2	Identificação com seis funções transmissibilidade	94
6.4	Análise dos resultados	101
6.5	Conclusões	102

7 Conclusão	103
7.1 Conclusões	103
7.2 Sugestão de trabalhos futuros	104

Apêndices 106

A Formulação do elemento finito <i>layerwise</i>	109
A.1 Introdução	109
A.2 Teoria de <i>Timoshenko</i>	109
A.2.1 Relação deformação-tensão	111
A.3 Teoria de deformação por camadas - Modelo <i>layerwise</i>	111
A.4 Campo de deslocamentos	112
A.5 Campo de deformações	112
A.5.1 Matriz de deformação	113
A.6 Campo de tensões	114
A.6.1 Matriz elasticidade	114
A.7 Energia potencial de deformação	114
A.8 Campo de velocidades	115
A.9 Energia cinética	115
A.10 Trabalho virtual das forças de superfície	116
A.11 Formulação variacional	117
A.12 Formulação do elemento finito	117
A.12.1 Elemento finito de viga <i>layerwise</i>	117
A.12.2 Forma fraca - Discretização do elemento finito	119
A.13 Equações de movimento	120
B Algoritmo G_0 G_∞ α τ - Resultados	121
C Algoritmos bietápicos - Resultados	123
D Identificação multiressonância de multifunção	127
D.1 Resultados	127

Lista de Figuras

1.1	Tratamento superficial sem restrição [2]	2
1.2	Tratamento superficial com restrição [4]	3
1.3	Tratamento integrado [4]	3
1.4	Distribuição da densidade de energia de deformação da camada viscoelástica [5] .	4
2.1	Ciclo de histerese de um material viscoelástico [12]	8
2.2	Excitação e resposta harmónica de um material viscoelástico [12]	9
2.3	Variação do módulo de ganho e factor de perda com a temperatura [12]	11
2.4	Variação do módulo de ganho e factor de perda com a frequência [12]	12
2.5	Variação do módulo de ganho e factor de perda com a amplitude de tensão [12] .	13
2.6	Princípio da correspondência frequência-temperatura [2]	14
2.7	Nomograma de frequência reduzida [14]	15
2.8	Configuração da viga de <i>Oberst</i> [12]	17
2.9	Configuração da viga de <i>Van Oort</i> [12]	17
2.10	Configuração da viga <i>sandwich</i> [12]	17
3.1	Viga encastrada-livre: deslocamentos transversais da excitação e da resposta . .	23
3.2	Esquema da montagem experimental [12]	24
3.3	Analizador dinâmico de sinal - <i>Signal Analyser Unit Type 2035 B&K</i> [12]	25
3.4	Amplificador do shaker - <i>LSD PA100E</i> [12]	25
3.5	Shaker electromagnético - <i>LDS V200</i> [12]	25
3.6	Acelerómetro - <i>B&K 4371</i> [12]	26
3.7	Vibrómetro laser - <i>Polytec OFV 303 Sensor Head</i> [12]	26
3.8	Controlador do vibrómetro laser - <i>Polytec OFV 3001</i> [12]	26
3.9	Frequências de controlo	27
3.10	Fluxograma do processo de identificação - I	29
3.11	Fluxograma do processo de identificação - II	30
3.12	Transmissibilidade experimental do provete P180 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	32
3.13	Transmissibilidade experimental do provete P220 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	32
3.14	Transmissibilidade experimental do provete P300 - $T \approx 24^{\circ}\text{C}$	33
4.1	Seleção das frequências de controlo nas partes real e imaginária da função trans- missibilidade	36
4.2	Taxa de variação dos parâmetros do modelo na banda de frequências [29.25 35.25] Hz com o algoritmo $G_0 G_{\infty} \alpha \tau$	39
4.3	Taxa de variação dos parâmetros do modelo na banda de frequências [29.5 35.25] Hz com o algoritmo $G_0 G_{\infty} \alpha \tau$	39

4.4	Comparação da transmissibilidade experimental e numérica - $[29.25 \text{ } 35.25] \text{ Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$	40
4.5	Indicador local LAC - $[29.25 \text{ } 35.25] \text{ Hz}$	41
4.6	Comparação entre a transmissibilidade experimental e numérica - $[29.5 \text{ } 35.25] \text{ Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$	41
4.7	Indicador local LAC - $[29.5 \text{ } 35.25] \text{ Hz}$	41
4.8	Propriedades do material viscoelástico - $[29.25 \text{ } 35.25] \text{ Hz}$ / $[29.5 \text{ } 35.25] \text{ Hz}$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$	42
4.9	Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty - \text{I}$	46
4.10	Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty - \text{II}$	47
4.11	Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0 - \text{I}$	48
4.12	Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0 - \text{II}$	49
4.13	Comparação da transmissibilidade experimental e numérica para os diferentes provetes com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty - T \approx 24^\circ\text{C}$	50
4.14	Indicador local LAC para os diferentes provetes com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	51
4.15	Comparação da transmissibilidade experimental e numérica para os diferentes provetes com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0 - T \approx 24^\circ\text{C}$	52
4.16	Indicador local LAC para os diferentes provetes com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$	53
4.17	Propriedades do material viscoelástico para os diferentes provetes com os algoritmos $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ / $G_\infty \alpha \tau - G_0 - T \approx 24^\circ\text{C}$	54
4.18	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para P180 em função da frequência - $T \approx 24^\circ\text{C}$	55
4.19	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para P220 em função da frequência - $T \approx 24^\circ\text{C}$	56
4.20	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para P300 em função da frequência - $T \approx 24^\circ\text{C}$	56
4.21	Taxa de variação dos parâmetros G_∞ e τ durante o processo iterativo para diferentes valores do parâmetro α - algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - provete P220	58
4.22	Taxa de variação dos parâmetros G_∞ e τ durante o processo iterativo para diferentes valores do parâmetro τ - algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - provete P220	58
5.1	Fluxograma do processo de identificação - sensibilidades	65
5.2	Taxa de variação de $G(\omega)$ com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	68
5.3	Taxa de variação de $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	69
5.4	Taxa de variação de $G(\omega)$ com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	70
5.5	Taxa de variação de $\eta(\omega)$ com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	70
5.6	Taxa de variação dos parâmetros com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	71
5.7	Taxa de variação de $G(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$	72
5.8	Taxa de variação de $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$	73
5.9	Taxa de variação dos parâmetros com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$	73
6.1	Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação multirressonância	80
6.2	Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação multirressonância	81
6.3	Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação multirressonância	81
6.4	Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - identificação multirressonância	82
6.5	Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - identificação multirressonância	83
6.6	Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - identificação multirressonância	83
6.7	Fluxograma do processo de identificação inversa multifunção	84

6.8	Transmissibilidades experimentais do provete P180 - $T \approx 20^\circ\text{C}$	85
6.9	Transmissibilidades experimentais do provete P220 - $T \approx 20^\circ\text{C}$	86
6.10	Transmissibilidades experimentais do provete P300 - $T \approx 20^\circ\text{C}$	86
6.11	Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade	87
6.12	Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade	88
6.13	Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade	88
6.14	Propriedades do material viscoelástico para os diferentes provetes com o algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade - $T \approx 20^\circ\text{C}$	89
6.15	Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0 - identificação com duas funções transmissibilidade	91
6.16	Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0 - identificação com duas funções transmissibilidade	91
6.17	Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0 - identificação com duas funções transmissibilidade	92
6.18	Propriedades do material viscoelástico para os vários provetes com o algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0 - identificação com duas funções transmissibilidade - $T \approx 20^\circ\text{C}$. . .	92
6.19	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para o provete P180 em função da frequência - $T \approx 20^\circ\text{C}$	93
6.20	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para o provete P220 em função da frequência - $T \approx 20^\circ\text{C}$	94
6.21	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para para o provete P300 em função da frequência - $T \approx 20^\circ\text{C}$	94
6.22	Transmissibilidade experimental medida em diferentes secções do provete - $T \approx 20^\circ\text{C}$	95
6.23	Indicador local LAC - algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$	96
6.24	Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da primeira ressonância	97
6.25	Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da segunda ressonância	97
6.26	Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $\alpha \tau$ - $G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade considerando as duas primeiras ressonâncias	98
6.27	Indicador local LAC - algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0	99
6.28	Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0 - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da primeira ressonância	100
6.29	Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0 - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da segunda ressonância	100
6.30	Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo G_∞ $\alpha \tau$ - G_0 - identificação com seis funções transmissibilidade considerando as duas primeiras ressonâncias	101
A.1	Modelo cinemático da teoria de flexão de vigas de <i>Timoshenko</i> [12]	110
A.2	Teoria de deformação por camada - Modelo <i>layerwise</i> [12]	111
A.3	Elemento isoparamétrico unidimensional - Sistema de coordenadas local e natural [12]	118

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades geométricas dos provetes	31
3.2	Propriedades dos materiais dos provetes	31
3.3	Discretização dos provetes	31
4.1	Parâmetros do modelo constitutivo com selecção de todas as frequências	36
4.2	Parâmetros do modelo na banda de frequências situada entre o máximo e mínimo da parte real da função transmissibilidade	37
4.3	Parâmetros do modelo para o provete P220 com restrição da banda	37
4.4	Algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	38
4.5	Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	38
4.6	Algoritmos de identificação bietápicos e respectivas etapas	43
4.7	Parâmetros do modelo com algoritmos de identificação $\alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$	43
4.8	Parâmetros do modelo com algoritmos de identificação $\alpha \tau - G_0 G_\infty \alpha \tau / G_0 G_\infty - \alpha \tau$	44
4.9	Parâmetros do modelo com algoritmos $\alpha - G_0 G_\infty \tau / \tau - G_0 \alpha G_\infty$	45
4.10	Erro na determinação de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$	55
4.11	Parâmetros do modelo com alteração da estimativa dos parâmetros com os algoritmos de identificação $G_0 G_\infty \alpha \tau / \alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$ - provete P220	57
5.1	Valores médios das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	66
5.2	Valores médios das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	66
5.3	Valores médios das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$	67
5.4	Ordem de influência dos parâmetros no módulo complexo	67
5.5	Sensibilidades e taxas de variação de $G(\omega)$	75
5.6	Variação dos parâmetros do modelo para $G(\omega)$	76
5.7	Sensibilidades e taxas de variação de $\eta(\omega)$	76
5.8	Variação dos parâmetros do modelo para $\eta(\omega)$	77
6.1	Parâmetros do modelo na primeira e segunda ressonância com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	80
6.2	Parâmetros do modelo considerando as duas primeiras ressonâncias com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	80
6.3	Parâmetros do modelo na primeira e segunda ressonância com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$	82
6.4	Parâmetros do modelo considerando as duas primeiras ressonâncias com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$	82
6.5	Identificação dos nós de medição	85

6.6	Parâmetros do modelo com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade	87
6.7	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - $T \approx 20^\circ\text{C}$. . .	90
6.8	Parâmetros do modelo com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - identificação com duas funções transmissibilidade	90
6.9	Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - $T \approx 20^\circ\text{C}$. . .	93
6.10	Localização dos nós de medição	95
6.11	Parâmetros do modelo com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade	98
6.12	Parâmetros do modelo com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - identificação com seis funções transmissibilidade	101
B.1	Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$ para o provete P180	121
B.2	Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$ para o provete P220	121
B.3	Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$ para o provete P300	122
C.1	Parâmetros constitutivos com modelo de otimização $\alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$ - três frequências de controle	123
C.2	Parâmetros do modelo constitutivo para o provete P220 com alteração simultânea das estimativas dos parâmetros - algoritmo de identificação $\alpha \tau - G_0 G_\infty$	124
C.3	Parâmetros do modelo constitutivo para o provete P220 com alteração simultânea das estimativas dos parâmetros - algoritmo de identificação $G_\infty \alpha \tau - G_0$	125
D.1	Parâmetros do modelo constitutivo na vizinhança da segunda ressonância - algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	127
D.2	Parâmetros do modelo constitutivo considerando três frequências de controle na vizinhança da segunda ressonância - algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	127
D.3	Parâmetros do modelo constitutivo considerando três frequências de controle em cada ressonância (primeira e segunda ressonância) - algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$	128

Lista de Símbolos

Siglas

FLD	camada livre ou camada superficial sem restrição
CLD	camada superficial com restrição
ILD	camada integrada
LAC	indicador local de amplitude
ADF	modelo de campo de deslocamentos inelástico
P180	provete <i>sandwich</i> de comprimento livre de 180mm
P220	provete <i>sandwich</i> de comprimento livre de 220mm
P300	provete <i>sandwich</i> de comprimento livre de 300mm
3M ISD112	material viscoelástico utilizado

Índices

i, j, k, n, q, l, r

Identificadores

$()^M$	referente à componente de membrana do elemento finito
$()^C$	referente à componente de acoplamento do elemento finito
$()^B$	referente à componente de flexão do elemento finito
$()^S$	referente à componente de corte transversal do elemento finito
$()_k$	referente à camada k do elemento finito
$()^e$	referente ao elemento finito
$()^*$	referente a uma quantidade complexa
$()_e$	referente à camada elástica do provete
$()_v$	referente à camada viscoelástica do provete
(1)	ponto de medição na extremidade do provete
(2)	ponto de medição da função de transmissão a 5mm da extremidade do provete
(3)	ponto de medição da função de transmissão a 10mm da extremidade do provete

Operadores matemáticos

$[\]^T$	transposta da matriz
$[\]^*$	complexa conjugada da matriz
$[\]^H$	transposta da complexa conjugada da matriz
$\boxed{}$	modificação da matriz
$\{\}$	modificação do vetor
(\bullet)	modificação da variável
$(\dot{\bullet})$	derivada em ordem ao tempo
$(\ddot{\bullet})$	segunda derivada em ordem ao tempo
d	operador diferencial
j	operador complexo $j = \sqrt{-1}$
$\Im(\bullet)$	parte imaginária
$\Re(\bullet)$	parte real

Variáveis escalares (\bullet)

A	área / m^2
B	largura /m
l, L	comprimento /m
h, H	espessura /m
E	módulo de <i>Young</i> /Pa
\bar{E}	módulo de extensão complexo /Pa
E'	módulo de extensão de ganho /Pa
E''	módulo de extensão de perda /Pa
E_0	módulo de extensional elástico ou módulo estático /Pa
E_∞	assíptota do módulo extensional elástico
G	módulo de corte /Pa
G_0	módulo de corte estático /Pa
\bar{G}	módulo de corte complexo /Pa
$G', G(\omega)$	módulo de corte de ganho /Pa
G''	módulo de corte de perda /Pa
G_∞	assíptota do módulo de corte /Pa
k_{max}	número total de frequências de controlo
M	massa /kg
t	tempo /s
T	temperatura / $^{\circ}\text{C}$
TR	função transmissibilidade de deslocamento
$T_{ij}(\omega)$	função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade numérica
$T_{ij}^x(\omega)$	função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade experimental
$S_i^*(\omega)$	deslocamento transversal da força de excitação no grau de liberdade
$U_j^*(\omega)$	deslocamento transversal da resposta no grau de liberdade j
u	translação segundo o eixo x ou translação no plano
w	translação segundo o eixo z ou translação normal ao plano
$s(t)$	deslocamento transversal imposto à base
$u(t)$	deslocamento transversal medido no ponto de resposta
$\tilde{s}(\omega)$	transformada de Fourier do deslocamento transversal imposto à base
$\tilde{u}(\omega)$	transformada de Fourier do deslocamento transversal medido no ponto da resposta

α_T	factor de translação
β^y	rotação local em torno do eixo y
$\eta, \eta(\omega)$	factor de perda
ν	coeficiente de <i>Poisson</i>
ω	frequência
f	frequência /Hz
f_R	frequência reduzida /Hz
ω_k	frequência de controlo /rad/s
f_n	frequência de ressonância para o modo n da viga base /Hz
f_s	frequência de ressonância para o modo s da viga compósita /Hz
δ	desfasamento
α	parâmetro fraccional
τ	tempo de relaxação /s
ϕ	fase /°
Ω	domínio / m^2
Π	energia de deformação
Π^C	energia cinética
Π^P	energia potencial
ρ	massa volúmica / Kg/m^3

Variáveis vectoriais { }

$\{d\}$	campo de deslocamentos generalizados
$\{d^e\}$	campo de deslocamentos generalizados do elemento finito
$\{d_i^e\}$	vector de graus de liberdade do elemento finito
$\{f(t)\}$	vector de solicitação dinâmica
$\{f_i^e\}$	vector de forças elementar
$\{f_i\}$	vector de forças global
$\{u\}$	campo de deslocamentos do elemento finito
$\{x(t)\}$	vector de resposta dinâmica
$\varepsilon/\{\varepsilon\}$	campo/vector de deformações
$\gamma/\{\gamma\}$	campo/vector de deformações de corte
$\sigma/\{\sigma\}$	campo/vector de tensões
$\tau/\{\tau\}$	campo/vector de tensões de corte

Variáveis matriciais []

$[\mathcal{B}]$	matriz de deformação
$[\mathcal{B}]^e$	matriz de deformação do elemento finito
$[\mathcal{D}]$	matriz de elasticidade
$[\mathcal{J}]$	matriz de inércia
$[K]$	matriz de rigidez
$[\bar{K}]$	matriz de rigidez complexa
$[K^e]$	matriz de rigidez do elemento finito
$[\mathcal{L}]$	matriz de operadores diferenciais
$[M]$	matriz de massa
$[M^e]$	matriz de massa do elemento finito
$[\mathcal{N}]$	matriz de distribuição do campo de deslocamentos
$[R^e]$	matriz de conectividade

Referenciais

x, z	sistema local de coordenadas cartesianas
X, Z	sistema global de coordenadas cartesianas
ξ, η	sistema natural do elemento finito

Capítulo 1

Introdução

Os recentes desenvolvimentos na área de engenharia estrutural, derivados pela crescente necessidade de se concretizarem objectivos cada vez mais exigentes, levaram ao desenvolvimento de estruturas mais eficientes através da utilização de novos materiais mais leves e resistentes, e pela aplicação de novos processos de produção e montagem.

Muitos dos problemas observados em aplicações estruturais resultam do uso de materiais leves e rígidos com baixa capacidade de amortecimento, tornando as estruturas frágeis quando submetidas à contínua acção de fontes externas e internas de vibração. Em certos casos, a fraca dissipação de energia por parte da estrutura pode conduzir ao seu colapso devido a falhas por fadiga causadas por carregamentos dinâmicos ou por impacto. Assim, as estruturas devem apresentar uma boa capacidade de dissipação de energia de forma a garantir um período razoável de vida útil e um nível de segurança adequado [1].

A crescente necessidade de se compensar a reduzida capacidade de amortecimento de estruturas e equipamentos levou ao desenvolvimento de mecanismos dissipativos adicionais que podem ser introduzidos em diversas formas, nomeadamente, pela aplicação de elementos viscoelásticos discretos ou contínuos e pela introdução de mecanismos activos auto-controlados nas estruturas.

1.1 Tratamentos viscoelásticos

Os materiais viscoelásticos, embora estruturalmente pouco eficientes, exibem uma capacidade dissipativa de grande eficiência resultante da estrutura molecular que apresentam. De facto, estes materiais dissipam grandes quantidades de energia de deformação para o exterior sob a forma de calor e a sua aplicação em tratamentos superficiais ou integrados em estruturas construídas a partir de materiais estruturalmente eficientes, como ligas de alumínio, ligas de aço e compósitos de carbono, constitui um dos mecanismos passivos de amortecimento mais eficientes [2].

Um tratamento superficial eficaz resulta da aplicação estratégica do material viscoelástico de modo a assegurar que a deformação cíclica da camada viscoelástica ocorre durante a vibração da estrutura nos modos de interesse, para que seja dissipada a maior quantidade de energia possível durante cada ciclo. Assim, é necessária a compreensão dos diferentes estados de deformação a que um material viscoelástico é sujeito, como também das suas propriedades, para que seja feita uma escolha adequada do tratamento superficial a ser aplicado [3].

1.2 Configurações de tratamento viscoelástico

A aplicação de tratamentos recorrendo a materiais viscoelásticos constitui uma solução simples e económica de introdução de capacidade adicional de dissipação de energia em estruturas e equipamentos para uma dada gama de frequências e temperaturas. Estes tratamentos, que introduzem elevados níveis de amortecimento, permitem o controlo e redução de efeitos dinâmicos, como elevados níveis de vibração e ruído, aumentando o tempo de vida útil de estruturas sujeitas a carregamentos cíclicos ou de impacto [4].

Os tratamentos viscoelásticos são classificados de acordo com a configuração adoptada para o tratamento, a qual conduz a diferentes tipos de deformação a que o material é sujeito. Assim, nos tratamentos superficiais sem restrição, FLD, o material é sujeito a deformações de extensão; nos tratamentos superficiais com restrição, CLD, e nos tratamentos integrados, ILD, o material é submetido maioritariamente a deformações de corte.

1.2.1 Tratamentos superficiais sem restrição

Os tratamentos superficiais sem restrição são obtidos através da deposição de uma camada de material viscoelástico sobre a superfície da estrutura, como se pode ver pela figura 1.1.

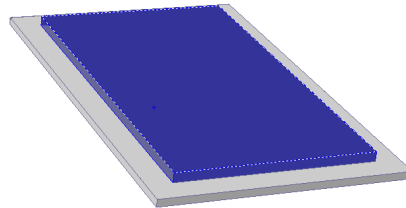


Figura 1.1: Tratamento superficial sem restrição [2]

Esta configuração é bastante simples e de baixo custo, contudo, uma vez que a camada viscoelástica é deformada maioritariamente em extensão, é necessário a aplicação de camadas espessas para se obter um nível de amortecimento adequado à aplicação. O aumento da espessura permite um aumento da capacidade dissipativa da camada, todavia, o aumento introduzido na massa e rigidez da estrutura pode não ser compensatório.

Assim, a eficiência destes tratamentos é condicionada pela espessura da camada viscoelástica, variando directamente com a razão entre o módulo de ganho do material viscoelástico e o módulo extensional do material da estrutura base sendo, por isso, tratamentos normalmente realizados com materiais de elevado módulo de ganho.

1.2.2 Tratamentos superficiais com restrição

Os tratamentos superficiais com restrição consistem na aplicação de uma camada de restrição sobre a camada viscoelástica, como se pode ver na figura 1.2, passando a camada viscoelástica a ser deformada por corte.

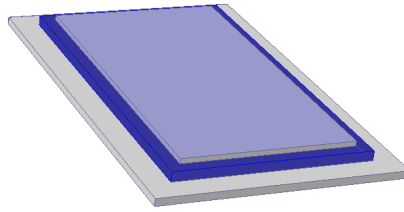


Figura 1.2: Tratamento superficial com restrição [4]

O material utilizado para a camada de restrição deve apresentar elevado módulo de *Young* e a sua principal função é a de restringir uma das faces da camada viscoelástica de modo a induzir deformação de corte na camada viscoelástica. Além disso, a camada de restrição assegura ainda a protecção da camada viscoelástica.

Este tipo de tratamentos apresenta elevada eficiência. Os materiais viscoelásticos normalmente utilizados apresentam um módulo de ganho relativamente baixo de forma a promover a sua deformação de corte [2].

1.2.3 Tratamentos integrados

Os tratamentos designados por tratamentos integrados, ILD, consistem na aplicação de uma camada de material viscoelástico no núcleo de uma estrutura *sandwich* garantindo que a energia é dissipada por deformação de corte, que se torna bastante elevada devido à posição particular do material viscoelástico sobre o plano neutro da estrutura, resultando em tratamentos de elevada eficiência. A configuração típica destes tratamentos é apresentada na figura 1.3.

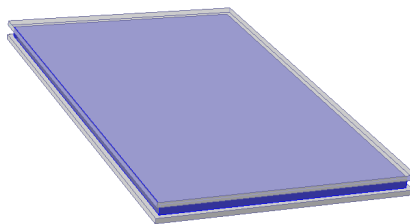


Figura 1.3: Tratamento integrado [4]

Na figura 1.4 é apresentada a distribuição da densidade da energia de deformação para o primeiro modo de vibração desenvolvida na camada viscoelástica das três configurações de tratamento aplicadas sobre uma viga.

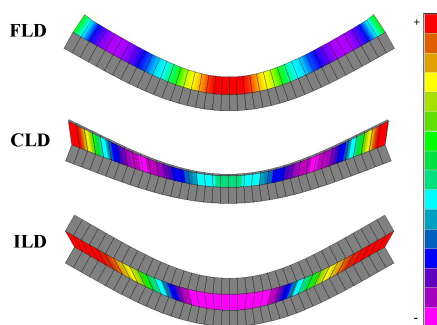


Figura 1.4: Distribuição da densidade de energia de deformação da camada viscoelástica [5]

Como se pode constatar, o campo de deformações desenvolvido na camada viscoelástica é dependente do tipo de configuração do tratamento viscoelástico aplicado na estrutura.

1.3 Motivação

A crescente aplicação de materiais viscoelásticos em estruturas com tratamentos superficiais tem revelado ser da maior importância em diversas aplicações para o controlo de vibrações devido ao excelente mecanismo de amortecimento que conferem. Assim, o estudo destes materiais e a devida compreensão do seu comportamento mecânico requer uma análise contínua das suas propriedades e da influência de diversos factores externos na sua caracterização.

Devido à ampla aplicabilidade de tratamentos superficiais integrando materiais viscoelásticos em vários campos da engenharia, têm sido desenvolvidos diversos procedimentos experimentais e estudos teóricos sobre estruturas compósitas com tratamentos superficiais sujeitas a esforços dinâmicos. O primeiro trabalho de grande relevância desenvolvido sobre a medição e cálculo do factor de perda em estruturas compósitas foi publicado por Oberst, que derivou um conjunto de equações para tratamentos superficiais sem restrição. Este procedimento é aceite como o método clássico de caracterização das propriedades de materiais viscoelásticos, baseado na medição de funções de resposta em frequência de vigas com determinadas configurações descritas na norma ASTM E 756 [6], que permite o estudo de vários materiais incluindo metais, cerâmicos, borrachas, plásticos e madeiras [7].

O trabalho desenvolvido por diversos autores [8–11] despertou o meu interesse para o desenvolvimento de técnicas que permitissem avaliar o comportamento destes materiais, com base num estudo mais aprofundado da dependência do módulo complexo com respeito aos parâmetros do modelo constitutivo utilizado na sua representação, através do desenvolvimento de modelos para identificação das propriedades de materiais viscoelásticos para uma vasta gama de frequências, com base em processos de optimização mais eficientes que permitissem reproduzir resultados mais próximos do real comportamento destes materiais.

Kim e Lee [8] propuseram um método de identificação dos parâmetros do modelo constitutivo de derivadas fraccionárias de materiais viscoelásticos através de técnicas de optimização mais eficientes. No método proposto, as funções de resposta em frequência são medidas a partir de testes de impacto em vigas encastradas-livres para diferentes temperaturas. As funções de resposta em frequência são comparadas às geradas numericamente através do modelo de elementos finitos, e as propriedades do material são determinadas utilizando um algoritmo numérico de procura, através da minimização do desvio entre as funções de resposta em frequência experimentais e numéricas.

O método estabelecido é definido através de um processo de optimização bietápico e formulação de uma análise de sensibilidade, utilizados durante o processo iterativo. Numa primeira fase do processo, são ajustadas as frequências de ressonância, através da minimização do quadrado da diferença entre as frequências obtidas experimentalmente e as geradas a partir do modelo numérico. Assim, as funções de resposta em frequência experimentais podem ser aproximadas mais rigorosamente das obtidas numericamente permitindo que a segunda etapa, definida pela minimização do quadrado da diferença entre as FRFs, possa ser iniciada com valores próximos dos reais. A análise de sensibilidade desenvolvida é baseada em funções gradiente com respeito aos parâmetros do modelo, através de métodos de diferenciação directa aplicados ao sistema de equações discretas. Os parâmetros sensibilidade da resposta são calculados a partir da sensibilidade da frequência, factor de perda e do módulo complexo, representado pelo modelo de derivadas fraccionárias, permitindo avaliar a influência dos parâmetros do modelo no processo de identificação.

1.4 Objectivos

O trabalho desenvolvido tem, como principal objectivo, o desenvolvimento do método inverso de identificação das propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos baseado num modelo constitutivo de derivadas fraccionárias, num modelo de elementos finitos e em funções de resposta em frequência do tipo transmissibilidade.

Para atingir o objectivo principal, são objectivos parciais desta dissertação:

- Robustecimento do algoritmo de identificação de modo a torná-lo insensível à estimativa dos parâmetros e assegurar a identificação dos parâmetros do modelo constitutivo fisicamente consistentes;
- Análise de sensibilidade do módulo de ganho e do factor de perda do material viscoelástico aos parâmetros do modelo constitutivo;
- Análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo constitutivo ao processo de optimização integrante do método de identificação inversa;
- Incorporação e análise de várias bandas de ressonância e de várias funções transmissibilidade no processo de identificação.

1.5 Estrutura da dissertação

Esta dissertação estrutura-se em 7 capítulos, onde no corrente capítulo se apresenta uma breve introdução do tema tratado, a motivação que levou ao seu desenvolvimento e são definidos os objectivos da dissertação.

No segundo capítulo, é apresentada uma descrição dos diferentes aspectos inerentes aos materiais viscoelásticos, em particular, a caracterização das suas propriedades mecânicas com a frequência e a temperatura, dando especial relevo ao módulo complexo e à sua representação através de um modelo constitutivo de derivadas fraccionárias. É feita, também, uma referência a métodos de caracterização das propriedades mecânicas destes materiais, bem como uma descrição dos aspectos mais importantes da norma ASTM E 756-05.

No terceiro capítulo é desenvolvido um método inverso de identificação dos parâmetros do modelo constitutivo, com referência a diversos aspectos fundamentais do processo de identificação, bem como uma descrição do procedimento experimental realizado e dos provetes analisados.

No quarto capítulo são desenvolvidos e analisados algoritmos de identificação dos parâmetros do modelo constitutivo baseados em processos biotáticos, com vista a melhorar a eficiência do método de identificação, em particular assegurando parâmetros fisicamente consistentes e insensibilidade do método às estimativas iniciais dos parâmetros. São apresentados e discutidos os resultados obtidos para diferentes variantes estudadas.

No quinto capítulo é realizada uma análise de sensibilidades, na qual são determinadas as sensibilidades das propriedades do material viscoelástico, pretendendo-se analisar a influência dos parâmetros do modelo constitutivo no módulo de ganho e no factor de perda. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos.

No sexto capítulo são apresentados diversos resultados obtidos na caracterização das propriedades do material viscoelástico com base numa análise multiresonância das funções de transmissibilidade e numa análise multifunção incluindo várias funções de transmissibilidade do provete.

A dissertação é finalizada com um capítulo dedicado à apresentação das conclusões retiradas ao longo do trabalho desenvolvido e são apresentadas algumas sugestões de trabalho futuro.

Capítulo 2

Caracterização dos materiais viscoelásticos

2.1 Introdução

Os materiais viscoelásticos empregues em tratamentos de amortecimento são, na maioria dos casos, materiais de base polimérica. São materiais constituídos por longas cadeias moleculares reticuladas cujas interações moleculares internas, que ocorrem durante a deformação cíclica do material, resultam na elevada dissipação de energia típica destes materiais constituindo, assim, um dos mecanismos mais eficazes de amortecimento.

Embora os materiais viscoelásticos de base polimérica apresentem as condições necessárias à sua aplicação em tratamentos viscoelásticos, as suas propriedades, nomeadamente o seu módulo de ganho e factor de perda, apresentam grande dependência com a temperatura e frequência, existindo uma relação bem definida entre a distribuição do módulo de ganho, que traduz a capacidade de armazenamento e restituição de energia de deformação, e do factor de perda, que representa a sua capacidade de dissipação de energia.

A maioria dos materiais viscoelásticos são considerados homogéneos, uma vez que as suas propriedades são idênticas em todo o volume de uma amostra, e isotrópicos, isto é, as suas propriedades são idênticas em qualquer direcção.

2.2 Ciclo de histerese para materiais viscoelásticos

Quando um material viscoelástico é sujeito a um carregamento harmónico, a deformação resultante é igualmente harmónica, à mesma frequência de carregamento, mas com um desfaseamento δ relativamente à tensão aplicada.

A representação da tensão medida, $\sigma(t)$, em função da deformação, $\varepsilon(t)$, apresenta-se sob a forma de uma elipse, a qual define o designado ciclo de histerese, cujo declive do eixo maior é uma medida da rigidez do material, e a razão entre o eixo menor e o eixo maior, uma medida da capacidade de dissipação de energia, isto é, do amortecimento.

O ciclo de histerese, ilustrado na figura 2.1, permite a modelação analítica do comportamento do material viscoelástico como função da temperatura, frequência e tensão para uma vasta gama de frequências e temperaturas, e a partir da sua análise é possível definir o modelo para a caracterização do módulo complexo.

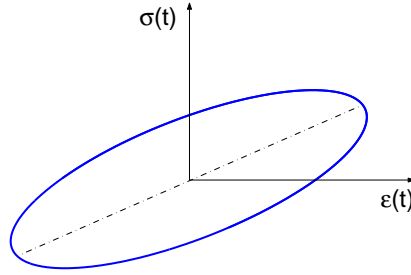


Figura 2.1: Ciclo de histerese de um material viscoelástico [12]

2.3 Comportamento de materiais no domínio da frequência

O factor mais determinante no comportamento de materiais viscoelásticos é a temperatura, e a propriedade mecânica mais importante em aplicações para controlo de vibração, a rigidez dinâmica.

Para a maioria destes materiais, a deformação resultante da tensão aplicada depende significativamente do tempo de aplicação da tensão, assim, para um material sujeito a uma dada tensão, aplicada durante um determinado intervalo de tempo, a deformação resultante irá partir de zero e aumentará com o tempo a uma taxa que depende da temperatura, contrariamente aos materiais elásticos em que o estado de deformação final é rapidamente atingido.

2.3.1 Comportamento ideal de um material elástico

Para um material que apresenta um comportamento linear elástico, as relações entre a tensão e deformação são dadas por,

$$\tau = G\gamma \quad (2.1)$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.2)$$

onde E é o módulo de *Young*, G o módulo de corte, σ a tensão normal e τ a tensão de corte. A deformação normal é representada por ε e a deformação de corte por γ .

A representação da tensão em função da deformação é, neste caso e na zona do comportamento linear, uma recta cujo declive é uma medida directa da rigidez.

Para estes materiais, E e G não variam muito rapidamente com a temperatura nem com a frequência para o caso de solicitações harmónicas. O módulo de *Young* e de corte apresentam a seguinte relação,

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (2.3)$$

onde ν representa o coeficiente de *Poisson*.

Todavia, para materiais viscoelásticos homogêneos e isotrópicos, o comportamento mecânico no domínio do tempo torna-se difícil de caracterizar. A relação estabelecida em (2.3) pode ser aplicada desde que sejam tidos em conta os efeitos da temperatura e frequência, que afectam directamente os valores de E , G e ν , mas não a sua relação [3].

2.3.2 Comportamento viscoelástico

Considerando uma excitação harmónica sinusoidal, o campo de tensões obtido é dado por,

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (2.4)$$

em que a deformação resultante, igualmente harmónica mas agora com um desfasamento δ em relação à tensão, ilustrada na figura 2.2, é dada por,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (2.5)$$

A equação (2.4) pode ser reescrita na forma,

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t - \delta + \delta) = \sigma_0 \sin(\omega t - \delta) \cos(\delta) + \sigma_0 \cos(\omega t - \delta) \sin(\delta) \quad (2.6)$$

A derivada da deformação é dada por,

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t - \delta) \quad (2.7)$$

donde decorre,

$$\cos(\omega t - \delta) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \quad (2.8)$$

que, após substituição em (2.6), resulta em,

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \varepsilon(t) \cos(\delta) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \sin(\delta) \quad (2.9)$$

Designando o termo $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta)$ pelo módulo de ganho de extensão E' vem que,

$$\sigma(t) = E' \varepsilon(t) + \frac{E'}{\omega} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \sin(\delta) \quad (2.10)$$

e para uma deformação de corte $\gamma(t)$,

$$\tau(t) = G' \gamma(t) + \frac{G'}{\omega} \frac{d\gamma(t)}{dt} \sin(\delta) \quad (2.11)$$

onde $\tau(t)$ representa a tensão de corte e G' o módulo de ganho de corte. O termo $\sin(\delta)$, designado por tangente de delta, é equivalente ao factor de perda η .

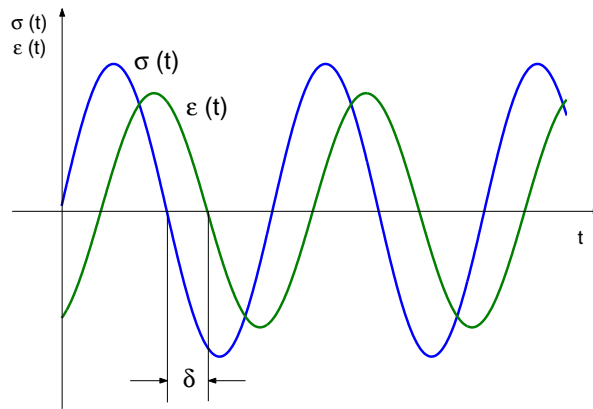


Figura 2.2: Excitação e resposta harmónica de um material viscoelástico [12]

2.4 Módulo complexo

As relações estabelecidas descrevendo a relação entre a tensão e a deformação para solicitações harmónicas são apresentadas em termos de quantidades reais. Contudo, esta aproximação dificulta a caracterização das propriedades de materiais sujeitos a solicitações não harmónicas recorrendo-se, assim, à sua representação em termos de quantidades complexas.

As equações (2.10) e (2.11) podem ser expressas no domínio da frequência da seguinte forma,

$$\sigma(\omega) = E'(\omega)\varepsilon(\omega) + jE''(\omega)\eta(\omega)\varepsilon(\omega) = [E'(\omega) + jE''(\omega)]\varepsilon(\omega) = \bar{E}(\omega)\varepsilon(\omega) \quad (2.12)$$

$$\tau(\omega) = [G'(\omega) + jG''(\omega)]\gamma(\omega) = \bar{G}(\omega)\gamma(\omega) \quad (2.13)$$

onde $\bar{E}(\omega)$ representa o módulo de extensão complexo e $\bar{G}(\omega)$ o módulo de corte complexo.

A componente real do módulo complexo, E' , designada por módulo de ganho, representa a capacidade de armazenamento e restituição de energia de deformação do material e a componente imaginária, E'' , também conhecida por módulo de perda, é obtida através do produto entre o factor de perda e o módulo de ganho e é uma medida da capacidade dissipativa do material viscoelástico.

A relação estabelecida entre módulo de ganho, E' , e o módulo de perda, E'' , permite definir uma das propriedades mecânicas características de materiais viscoelásticos, designada por factor de perda, e definida como,

$$\eta(\omega) = \frac{E''}{E'} = \frac{\Im(\bar{E})}{\Re(\bar{E})} \quad (2.14)$$

2.5 Efeito dos factores ambientais no módulo complexo

O comportamento de materiais viscoelásticos aplicados em tratamentos superficiais e, consequentemente, a capacidade de amortecimento através da qual o sistema consegue dissipar energia, apresenta elevada dependência com a temperatura e frequência. Assim, torna-se necessário avaliar a influência destes efeitos na variação das propriedades dos materiais para que seja feita uma escolha adequada do tratamento superficial utilizado.

Os factores ambientes de maior relevância são a temperatura, frequência e tensões cíclicas e, em menor escala, outros factores ambientais.

2.5.1 Efeito da temperatura

A temperatura é considerada o factor de maior influência no comportamento de materiais viscoelásticos sendo determinante para a caracterização das suas propriedades, em particular, o módulo de ganho e factor de perda.

O efeito da temperatura pode ser observado pela figura 2.3, onde é possível distinguir quatro regiões características para o comportamento de materiais viscoelásticos.

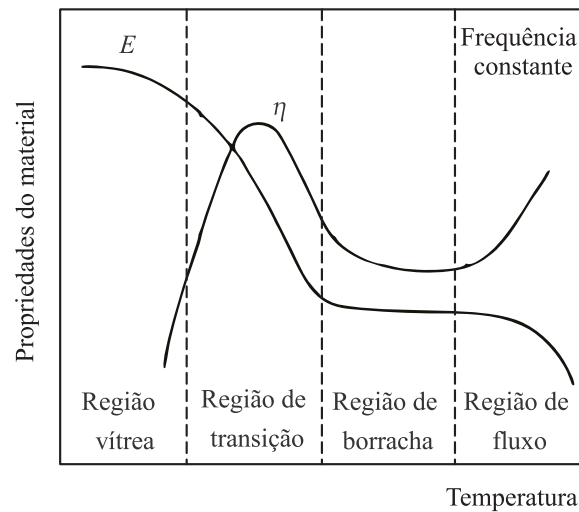


Figura 2.3: Variação do módulo de ganho e factor de perda com a temperatura [12]

Na primeira região, designada por região vítrea, o material apresenta o seu máximo para o módulo de ganho, que varia lentamente com a temperatura, e baixos valores para o factor de perda, que aumenta muito rapidamente com a temperatura.

Na região de transição, o módulo de ganho decresce rapidamente com a temperatura e o factor de perda atinge o seu máximo. A região de borracha é caracterizada por baixos valores para o módulo de ganho e factor de perda, que variam lentamente com a temperatura.

A quarta região é típica apenas para alguns materiais tais como termoplásticos. Designada por região de fluxo, é caracterizada por um contínuo *amolecimento* do material com o aumento da temperatura, como se derretesse, enquanto que o factor de perda atinge o seu máximo. Apesar de ser uma região importante para a completa caracterização das propriedades do material, não é muito utilizada devido à reduzida rigidez e elevada instabilidade do material.

2.5.2 Efeito da frequência

Para materiais viscoelásticos, o módulo de ganho é caracterizado por um aumento contínuo com o aumento da frequência sendo este aumento menos significativo nas regiões vítrea e de borracha ao passo que, na região de transição, a taxa de variação é elevada. O factor de perda aumenta com a frequência na zona de borracha, atingindo o seu máximo na zona de transição e diminuindo progressivamente com esta na região vítrea, como se pode ver pela figura 2.4.

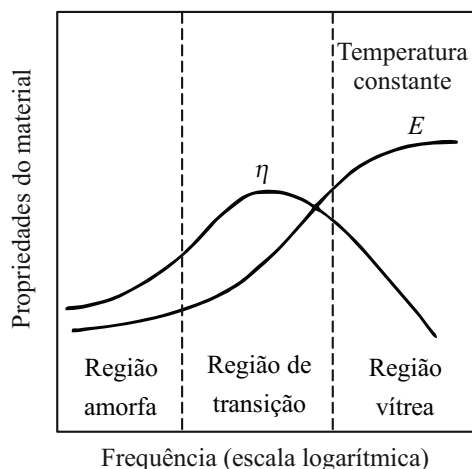


Figura 2.4: Variação do módulo de ganho e factor de perda com a frequência [12]

Assim, é possível observar que o efeito da frequência é qualitativamente inverso ao da temperatura, mas em menor escala, pois é necessária uma variação de várias décadas de frequência para reflectir a mesma alteração no comportamento do material que apenas alguns graus de temperatura produzem.

Este fenómeno é o aspecto mais importante da teoria da viscoelasticidade, constituindo a base para o princípio de sobreposição frequência-temperatura que permite relacionar os efeitos da temperatura e frequência no comportamento do material.

2.5.3 Efeito das tensões cíclicas

A caracterização das propriedades dos materiais viscoelásticos no domínio linear apenas é possível para baixas amplitudes das tensões cíclicas, pois a partir de determinados valores o material apresenta um comportamento não linear que depende do tipo de material, em particular, da sua estrutura molecular.

O efeito das tensões cíclicas torna-se difícil de avaliar uma vez que elevadas tensões resultam em elevada dissipação de energia por parte do material, traduzindo-se num aumento rápido da temperatura, combinando-se os efeitos da temperatura e das tensões cíclicas.

Este aspecto é particularmente significativo na zona de transição em que o nível de amortecimento é muito elevado, todavia, na zona de borracha, onde o módulo de ganho e factor de perda variam lentamente com a temperatura, o efeito da temperatura torna-se secundário face ao das tensões. As propriedades apresentam uma variação idêntica à da temperatura, mas menos significativa.

Na variação das propriedades com a amplitude das tensões cíclicas é possível observar três regiões distintas, nomeadamente, a região linear, de transição e de equilíbrio, ilustradas na figura 2.5.

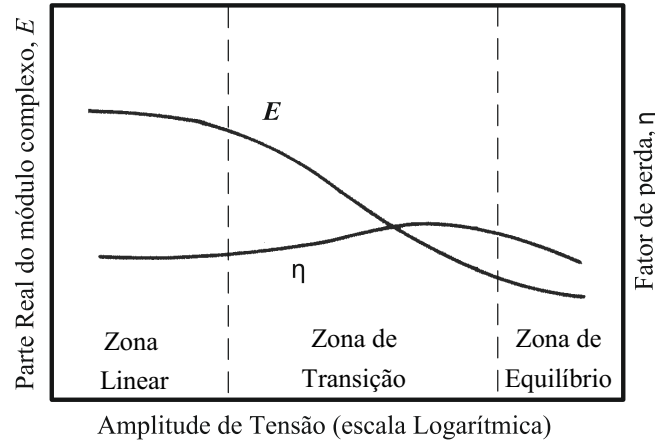


Figura 2.5: Variação do módulo de ganho e factor de perda com a amplitude de tensão [12]

2.5.4 Outros aspectos ambientais

As propriedades dos materiais viscoelásticos podem ser influenciadas por diversos factores ambientais, como envelhecimento, exposição a combustíveis e outros fluídos, vácuo e pressão, que podem resultar na alteração da sua estrutura molecular quando são atingidos valores extremos para estes factores.

A contínua exposição do material a um ambiente específico, tal como elevadas temperaturas, reflecte-se num aumento do módulo de ganho e decréscimo do factor de perda [13].

2.6 Representação do módulo complexo

A caracterização do módulo complexo através da representação do módulo de ganho e factor de perda é um procedimento que requer uma análise simultânea da influência da temperatura e frequência sobre as propriedades do material viscoelástico. A determinação do módulo complexo para valores discretos pode ser feita com base em variáveis que permitam combinar os efeitos da temperatura e frequência e descrever convenientemente a variação do módulo complexo com estes.

2.6.1 Princípio da correspondência frequência-temperatura

A caracterização das propriedades do material viscoelástico pode ser efectuada combinando os efeitos da frequência e temperatura numa única variável definida como frequência reduzida (f_R) e através da medição do módulo complexo para um número limitado de temperaturas e para uma gama de frequências restrita.

O processo baseia-se no princípio da correspondência frequência-temperatura que assenta no pressuposto de que diferentes pares de frequência e de temperatura podem apresentar o mesmo módulo complexo. Assim, o módulo complexo para uma dada frequência f_1 e temperatura de referência T_1 é idêntico ao obtido à frequência f_2 e temperatura T_2 , que deve ser seleccionada de forma a que,

$$\bar{G}(f_1, T_1) = \bar{G}(f_2, \alpha_T(T_2)) \quad (2.15)$$

onde α_T representa o factor de translação que é única e exclusivamente função da temperatura [3].

A determinação do factor de translação baseia-se na observação de que é possível construir uma única curva do módulo de ganho e factor de perda através da translação horizontal do conjunto de pontos medidos a diferentes temperaturas, como se pode ver pela figura 2.6, garantindo que a translação representa a_T como um factor aplicado à frequência para qualquer temperatura T .

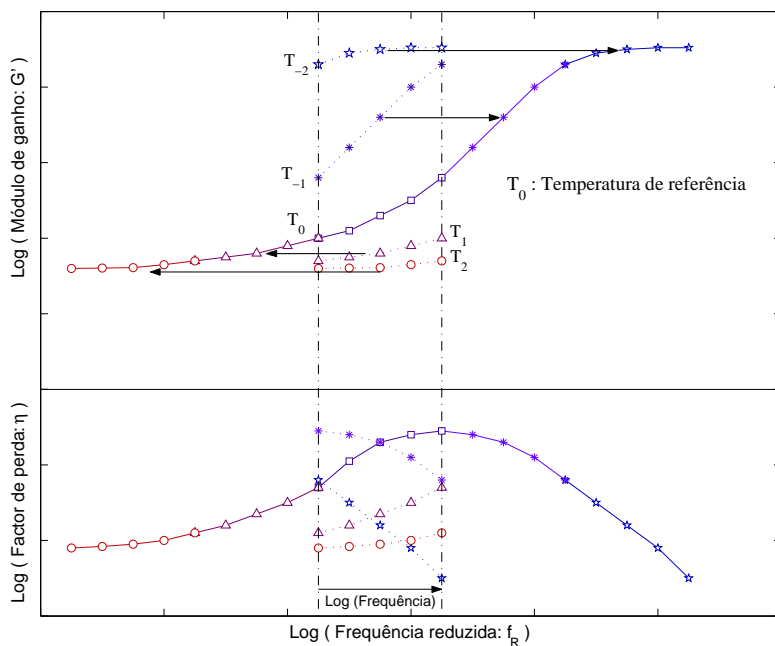


Figura 2.6: Princípio da correspondência frequência-temperatura [2]

Considerando um conjunto hipotético de pontos experimentais obtidos para diferentes temperaturas ($T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2$) e para diferentes frequências, representados na figura 2.6 pelos pontos ligados por linhas interrompidas, verifica-se que a translação do conjunto de pontos isotérmicos em relação à temperatura de referência permite definir uma única curva principal. A curva gerada, única para uma dada temperatura de referência T_0 , é função da frequência reduzida e permite determinar o valor do módulo complexo do material viscoelástico para diferentes pares de frequência e de temperatura, mesmo que estes não tenham sido considerados no procedimento experimental.

2.6.2 Nomograma de frequência-temperatura

O nomograma de frequência-temperatura ou de frequência reduzida, representado na figura 2.7, é um gráfico que permite a representação do módulo de ganho e factor de perda em função da frequência, juntamente com o factor de translação. Com este gráfico é possível determinar o valor da frequência reduzida correspondente ao par frequência-temperatura pretendido, através da intersecção da linha horizontal definida pela escala logarítmica da frequência, e a linha isotérmica correspondente à temperatura.

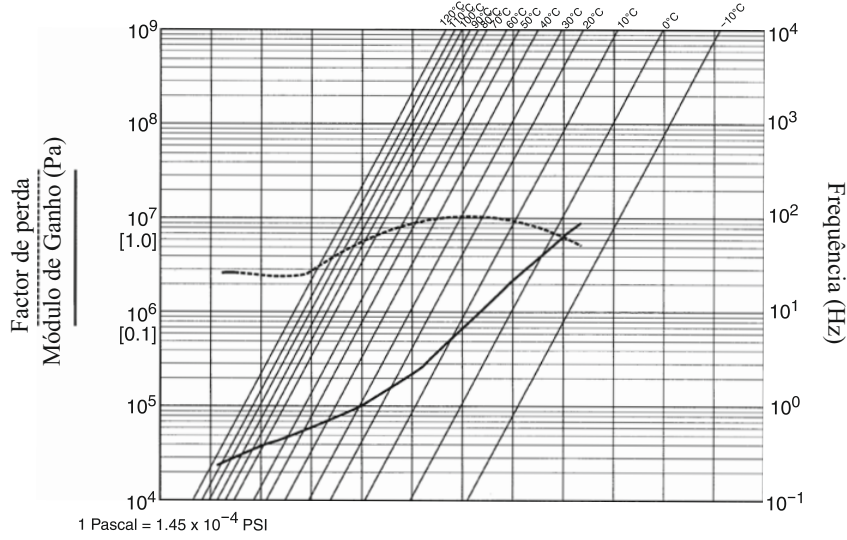


Figura 2.7: Nomograma de frequência reduzida [14]

Traçando a linha vertical que passa no ponto de intersecção, obtém-se o valor do módulo de ganho e do factor de perda, dado pela intersecção da recta com as curvas das propriedades [2].

O nomograma de frequência-temperatura tem sido amplamente reconhecido como uma forma de representação das propriedades de materiais viscoelásticos para uma vasta gama de frequências e temperaturas sendo normalmente através da sua representação que os fabricantes de materiais viscoelásticos representam as propriedades dos seus materiais.

2.7 Modelo constitutivo do material viscoelástico

As propriedades dinâmicas, elásticas e de amortecimento dos materiais dependem, em menor ou maior grau, da frequência. De modo a ter em conta as propriedades dos materiais em análise de vibrações, são definidos modelos que permitam caracterizar a dependência destas com a frequência. A análise destes modelos, descrevendo o seu comportamento dinâmico, é um método eficaz de encontrar as funções de frequência das propriedades de materiais viscoelásticos [15]. Na literatura [2] encontram-se algumas propostas de modelos representativos do efeito da frequência nas propriedades de materiais viscoelásticos.

Neste trabalho, o modelo constitutivo considerado é baseado no modelo de derivadas fraccionárias que permite a caracterização do comportamento de materiais viscoelásticos no domínio da frequência e do tempo. O modelo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros, também conhecido por modelo de Zener generalizado, permite relacionar $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ no domínio do tempo como,

$$\sigma(t) + \tau^\alpha D^\alpha[\sigma(t)] = G_0 \varepsilon(t) + G_\infty \tau^\alpha D^\alpha[\varepsilon(t)] \quad (2.16)$$

onde t é o tempo, τ o tempo de relaxação, α o parâmetro fraccional, $0 < \alpha < 1$, e D^α o operador da derivada fraccional de ordem α definido como,

$$D^\alpha[\sigma(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2.17)$$

onde Γ é a função gamma.

Considerando $\alpha = 1$ na equação (2.16), é então definido o modelo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros. As transformações da equação (2.16) para o domínio da frequência resultam no módulo complexo para este modelo. Para tal, recorrendo às transformadas de Fourier, o operador D^α passa a ser representado por $(j\omega)^\alpha$ conduzindo à expressão para o módulo complexo no domínio da frequência dada por,

$$\bar{G}(j\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (2.18)$$

onde G_0 e G_∞ são o módulo de corte estático e a assíntota do módulo de corte, respectivamente [16]. O tempo de relaxação τ está relacionado com a frequência à qual o factor de perda atinge o seu máximo e o parâmetro fraccional α com a capacidade de amortecimento. O parâmetro fraccional encontra-se, normalmente, compreendido entre 0.5 e 0.9 para polímeros, e para $\alpha=1$ é representado o comportamento elástico de materiais com módulo de *Young* definido por $E = 0.5(E_0 + E_\infty)$ [17].

2.8 Norma ASTM E 756-05

O processo de medição do módulo complexo de um material viscoelástico reveste-se de um conjunto de características e requisitos que o tornam numa tarefa difícil, requerendo um procedimento de medição rigoroso e meticuloso. O elevado amortecimento proporcionado pelos materiais viscoelásticos, a heterogeneidade do material e a dificuldade na obtenção de uma montagem experimental, idêntica ao modelo numérico hipoteticamente considerado, constituem as principais dificuldades na obtenção de um sistema capaz de caracterizar convenientemente e de forma simples as propriedades de materiais viscoelásticos com elevado amortecimento. Existem vários métodos de medição do módulo complexo de materiais viscoelásticos que se podem agrupar em dois grandes grupos: métodos indiretos baseados em provetes tipo viga com tratamento viscoelástico e métodos diretos baseados em provetes de material viscoelástico que constituem o elemento elástico-amortecedor de sistemas discretos onde o módulo complexo é medido através de um ensaio dinâmico.

O método descrito pela norma ASTM E 756-05 [6] é utilizado para determinar as propriedades de materiais tais como, o factor de perda, η , módulo de *Young*, E , ou módulo de corte, G , sendo possível a correcta caracterização destas propriedades para uma vasta gama de frequências e temperaturas, permitindo o estudo de materiais com aplicação em vibração estrutural, acústica e controlo de ruído sonoro. Tais materiais incluem metais, cerâmicos, borrachas, plásticos e madeiras, entre outros, sendo utilizada uma viga encastrada-livre, sobre a qual é aplicado um tratamento viscoelástico.

2.8.1 Descrição do método

A configuração escolhida para o provete deve ser feita de acordo com o tipo de material viscoelástico a caracterizar e as propriedades a determinar. Para tal, são utilizadas diferentes configurações do provete, escolhidas conforme a viga seja sujeita a deformações extensionais ou de corte.

Viga de *Oberst*

A viga de *Oberst* é obtida pela deposição de uma camada sem restrição de material viscoelástico a caracterizar, como se pode ver na figura 2.8. A viga base, preferencialmente metálica, é testada de forma a determinar as suas frequências naturais para a gama de temperaturas desejada. De seguida, é aplicada a camada de material viscoelástico utilizando um adesivo

estrutural constituindo assim a viga compósita, que será ensaiada de forma a determinar as novas frequências de ressonância e correspondentes factores de perda.



Figura 2.8: Configuração da viga de *Oberst* [12]

As propriedades do material são determinadas a partir da rigidez da viga base, obtida utilizando os resultados dos testes relativos à viga base e à viga compósita.

Viga de *Van Oort*

Na viga de *Van Oort*, ilustrada na figura 2.9, são aplicadas duas camadas idênticas de material viscoelástico, uma em cada lado da viga. Esta configuração permite evitar o problema associado à elevada diferença entre os coeficientes de dilatação térmica dos materiais constituintes da viga que induz flexão na viga quando submetida a temperaturas muito superiores à temperatura de montagem. Por outro lado, dado que a posição do eixo neutro da viga compósita permanece inalterada relativamente à posição inicial da viga não amortecida, a expressão que define a rigidez de flexão da viga compósita é significativamente simplificada [2].



Figura 2.9: Configuração da viga de *Van Oort* [12]

Viga *sandwich*

A configuração de viga *sandwich*, figura 2.10, é utilizada para determinar as propriedades de vigas sujeitas a deformações de corte e requer duas vigas base idênticas, que devem ser testadas de forma a determinar as suas frequências de ressonância que devem ser idênticas ao longo da gama de temperaturas de interesse, entre as quais é aplicada a camada de material viscoelástico, constituindo a viga compósita.

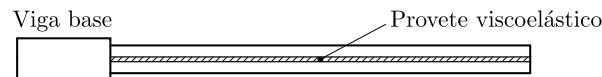


Figura 2.10: Configuração da viga *sandwich* [12]

Após a escolha adequada da configuração do provete, este deve ser encastrado num suporte rígido e colocado no interior de uma câmara ambiental para controlo da temperatura. São utilizados dois transdutores sem contacto nas medições, um para medir a força de excitação e outro para medir a resposta no local desejado. Através da medição de várias ressonâncias é possível determinar a influência da frequência nas propriedades do material e, do mesmo modo, variando a temperatura no interior da câmara, o efeito da temperatura pode igualmente ser estabelecido sobre as mesmas.

2.8.2 Pressupostos

- Todas as medições são realizadas dentro da gama linear do material, isto é, o material viscoelástico comporta-se de acordo com a teoria da viscoelasticidade linear. Se a viga for excitada para além da região linear, os resultados obtidos não serão tidos em conta. Para vigas com comportamento linear, o pico do deslocamento do provete deverá ser inferior à espessura da viga base;
- A amplitude da força de excitação deverá ser constante com a frequência. Quando tal não é possível, a amplitude da resposta deverá ser dividida pela amplitude da força de excitação e a função de resposta em frequência definida passará a ser utilizada para estudar as propriedades do material;
- As equações relativas às configurações viga de *Oberst* e viga de *Van Oort* são baseadas na teoria clássica de vigas, mas não incluem os termos relativos à inércia rotacional ou deformação de corte;
- As equações relativas à viga *sandwich* não incluem os termos extensionais da camada viscoelástica. Esta suposição é válida quando o módulo da camada viscoelástica é significativamente inferior, cerca de dez vezes, à da camada metálica;
- A excitação é aplicada através de um excitador electromagnético sem contacto;
- As equações relativas à viga *sandwich* foram desenvolvidas e resolvidas considerando expansão sinusoidal para as formas modais de vibração. Tal é válido apenas para os modos de maior ordem pelo que não são considerados os resultados relativos ao primeiro modo de vibração;
- Considerar o factor de perda da viga base igual a zero.

2.8.3 Montagem experimental

A montagem experimental consiste num suporte rígido para encastrar o provete, uma câmara ambiental para controlo da temperatura, dois transdutores, e a instrumentação necessária para a geração dos sinais de excitação e medição da resposta.

As configurações possíveis para o provete utilizadas na norma são, o provete disposto na vertical com este encastrado na extremidade da excitação (empregue quando são utilizados transdutores não contactáveis), ou disposto na horizontal e, neste caso, o encastramento será na extremidade onde será medida a resposta (quando são utilizados transdutores de contacto).

Instrumentação

A instrumentação mínima requer dois canais para registo da informação relativa à excitação e à resposta e um canal para a temperatura. No caso da primeira configuração, é utilizado um osciloscópio de dois canais uma vez que são utilizados dois canais para a representação da excitação e a resposta. No caso da segunda configuração, é utilizado um analisador de espectro de dois canais em que é possível a representação da excitação e resposta.

Transdutores

Os transdutores utilizados deverão ser, sempre que possível, transdutores não contactáveis de forma a minimizar fontes de vibração externa. A força é aplicada através de um transdutor electromagnético não contactável (tacómetro) e por vezes a resposta também.

Para elevadas frequências, em que estes transdutores perdem sensibilidade, deverão ser utilizados transdutores de contacto, como acelerómetros, mas apenas se não constituírem uma fonte de excitação externa. No caso do uso de transdutores deste tipo, a configuração deverá ser a com o encastramento na extremidade da excitação [6].

Recentes estudos desenvolvidos [7] mostraram que o uso de transdutores não contactáveis no método da viga de *Oberst* pode conduzir a erros na determinação das propriedades de materiais viscoelásticos devido ao efeito electromagnético introduzido pelo transdutor de excitação não contactável.

Numa primeira fase, foram estudados os efeitos de vários parâmetros tais como, amplitude de excitação, condições de montagem, tipo de excitação aplicada (refira-se que foi utilizado um sinal de ruído aleatório para a excitação) e comprimento do provete, de modo a melhorar a precisão dos resultados obtidos na determinação das propriedades do material, e com base em diversos testes realizados, foi avaliado o efeito adverso da excitação electromagnética.

Do trabalho [7] foram retiradas, entre outras, as seguintes conclusões:

- O campo electromagnético criado pelo transdutor de excitação electromagnético na extremidade livre da viga de *Oberst* introduz restrições adicionais no sistema. O efeito adverso pode ser modelado como um mola situada entre a extremidade do provete e o exterior. A introdução de rigidez adicional no sistema devido ao transdutor pode reduzir significativamente a precisão das propriedades estimadas. Os erros na identificação das frequências naturais e módulo de *Young* é mais significativa para vigas cujo comprimento da secção exposta à excitação electromagnética é maior;
- Os diversos testes realizados revelaram que o primeiro modo de vibração é o mais afectado pelo efeito electromagnético, conduzindo a resultados inconsistentes na determinação das propriedades dos materiais, e que o erro na estimativa das propriedades devido ao aumento de rigidez introduzido pelo campo electromagnético é menor para modos mais elevados. Foi possível constatar que vigas mais longas e, portanto, mais flexíveis, são mais susceptíveis a erros na determinação das frequências naturais e, consequentemente, das propriedades, devido ao efeito mais significativo do aumento de rigidez do sistema;
- O erro associado à estimativa das propriedades pode ser reduzido minimizando o comprimento da viga exposta ao campo electromagnético. Porém, este comprimento deve ser mantido a um valor adequado de forma a introduzir níveis suficientes de excitação na viga para a correcta medição das funções de resposta em frequência, especialmente em materiais com elevados níveis de amortecimento.

Capítulo 3

Método inverso de identificação

3.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentado o método inverso de identificação desenvolvido previamente [12], com referência aos aspectos mais relevantes na definição do processo de identificação dos parâmetros do modelo constitutivo, e do qual se partiu para o desenvolvimento dos restantes capítulos.

O método inverso de identificação proposto baseia-se na minimização do resíduo entre funções de resposta em frequência do tipo transmissibilidade geradas numericamente e medidas experimentalmente, determinadas para frequências discretas definidas como frequências de controlo. As técnicas experimentais para a caracterização das propriedades do material viscoelástico assentam em testes de vibração forçada com ressonância.

Com o método proposto, os parâmetros do modelo constitutivo do material são identificados permitindo a determinação das propriedades do material para toda a banda de frequências considerada.

Assim, o método engloba os seguintes componentes:

- modelo de elementos finitos para representação do comportamento dinâmico de um protótipo composto com camada(s) de material viscoelástico;
- função de resposta em frequência numérica e de tipo transmissibilidade;
- função de resposta em frequência experimental e de tipo transmissibilidade;
- um modelo constitutivo para o material viscoelástico;
- selecção de um conjunto de frequências para ajustamento das funções de transmissibilidade;
- um algoritmo de minimização da função desvio entre as funções de transmissibilidade;
- um indicador que permita avaliar o nível de correlação entre as funções de resposta em frequência.

3.2 Modelo de elementos finitos

De forma a avaliar a função de resposta em frequência numérica é necessário definir um modelo numérico para a determinação da resposta dinâmica da viga. Para tal, foi considerado o método de elementos finitos para a representação da viga em estudo.

A simulação do comportamento dinâmico dos provetes compósitos com camadas viscoelásticas depende da correcta representação da deformação de corte que ocorre nas camadas viscoelásticas e da correspondente energia de deformação. Assim, é necessário utilizar modelos que representem convenientemente o comportamento dinâmico da viga e do tratamento viscoelástico aplicado para constituir o provete de ensaio.

A modelação espacial do provete compósito é realizada através do método dos elementos finitos em que é utilizado um elemento finito multicamada baseado numa teoria *layerwise*, utilizando a teoria de *Timoshenko* para representar cada camada individual. O elemento finito multicamada desenvolvido em [12] é verificado numericamente e validado experimentalmente em termos de funções de resposta em frequência do tipo transmissibilidade medidas para um conjunto de provetes representativos das configurações de tratamento integrado, nomeadamente, configurações *sandwich* em vigas do tipo encastrada-livre. A formulação do elemento finito com base na teoria *layerwise*, representativo dos diferentes provetes compósitos analisados, é apresentada no Apêndice A.

Em dinâmica estrutural, o método de elementos finitos permite a discretização da equação diferencial de movimento de um sistema com comportamento viscoelástico num sistema de equações diferenciais de segunda ordem, não lineares, expressas em termos das matrizes e vectores espaciais do sistema [17],

$$M\ddot{u}(t) + K^*(\omega)u(t) = f(t) \quad (3.1)$$

onde $f(t)$, $\ddot{u}(t)$ e $u(t)$ representam o vector força, o vector aceleração e o vector deslocamento. A matriz M é a matriz de massa e $K^*(\omega)$ representa a matriz de rigidez complexa que é função da frequência e onde a parte real representa a rigidez elástica e a parte imaginária representa a dissipação de energia. Para materiais homogêneos, a matriz de rigidez complexa $K^*(\omega)$ pode exprimir-se na forma,

$$K^*(\omega) = K(\omega) + jH(\omega) = K(\omega)(1 + j\eta(\omega)) \quad (3.2)$$

sendo $K(\omega)$ a matriz de rigidez elástica e $H(\omega)$ a matriz de amortecimento viscoelástico.

Para provetes compósitos sob a forma de vigas com tratamentos viscoelásticos, as componentes elástica e viscoelástica das matrizes espaciais, identificadas por $(\bullet)_e$ e $(\bullet)_v$, respectivamente, devem ser consideradas separadamente como,

$$M = M_e + M_v \quad (3.3)$$

$$K^*(\omega) = K_e + K_v^*(\omega) \quad (3.4)$$

onde $K_v^*(\omega)$ é dado por,

$$K_v^*(\omega) = K_v(\omega) + jH_v(\omega) \quad (3.5)$$

em que $K_v(\omega)$ corresponde à matriz de rigidez da parte elástica da camada viscoelástica e $H_v(\omega)$ à matriz de amortecimento viscoelástico.

Substituindo (3.5) em (3.4), a matriz de rigidez global da viga compósita pode escrever-se na forma,

$$K^*(\omega) = K_e + K_v(\omega) + jH_v(\omega) = (K_e + K_v(\omega)) + j\eta(\omega)K_v(\omega) \quad (3.6)$$

que é definida pela matriz de rigidez relativa à componente elástica das camadas elásticas e viscoelásticas K_e e $K_v(\omega)$, respectivamente, e pela matriz de amortecimento das camadas viscoelásticas, $H_v(\omega)$, que pode ainda ser expressa em termos da matriz de rigidez elástica $K_v(\omega)$ como $H_v(\omega) = \eta(\omega)K_v(\omega)$.

3.3 Função de resposta em frequência numérica

Uma vez que o método proposto é baseado no ajustamento entre funções transmissibilidade de deslocamento de uma viga encastrada-livre excitada passivamente através de um deslocamento imposto ao encastramento, é necessário reescrever a equação de movimento definida em (3.1).

Para uma excitação passiva harmónica imposta ao encastramento, $s(t) = S^* e^{j\omega t}$, a equação de movimento no domínio da frequência de uma viga encastrada-livre pode ser representada separando o grau de liberdade relativo ao deslocamento imposto ao encastramento dos restantes graus de liberdade correspondentes aos deslocamentos desconhecidos, indicados por $(\bullet)_s$ e $(\bullet)_u$, respectivamente, como,

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{su} \\ M_{us} & M_{uu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss}^*(\omega) & K_{su}^*(\omega) \\ K_{us}^*(\omega) & K_{uu}^*(\omega) \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} S^* \\ U^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^* \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde S^* , U^* e R^* são os fasores do movimento imposto ao encastramento, dos deslocamentos desconhecidos e da força de reacção do encastramento, respectivamente.

O desenvolvimento de (3.7) conduz às seguintes duas equações,

$$(-\omega^2 M_{ss} + K_{ss}^*(\omega)) S^*(\omega) + (-\omega^2 M_{su} + K_{su}^*(\omega)) U^*(\omega) = R^* \quad (3.8)$$

$$(-\omega^2 M_{us} + K_{us}^*(\omega)) S^*(\omega) + (-\omega^2 M_{uu} + K_{uu}^*(\omega)) U^*(\omega) = 0 \quad (3.9)$$

A solução $U(\omega)$ da equação (3.9) fornece a resposta estacionária da viga ao movimento harmónico $s(t) = S^* e^{j\omega t}$ imposto ao encastramento, a partir da qual se podem determinar as funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade entre qualquer grau de liberdade e o deslocamento imposto ao encastramento.

A função de resposta em frequência do tipo transmissibilidade, $T_{ij}(\omega)$, é definida pela razão entre o fasor $U_j^*(\omega)$ do deslocamento transversal da resposta no grau de liberdade j e a amplitude $S_i^*(\omega)$ do deslocamento transversal da excitação aplicada ao grau de liberdade i correspondente ao encastramento, e é dada pela expressão,

$$T_{ij}(\omega) = \frac{U_j^*(\omega)}{S_i^*(\omega)} \quad (3.10)$$

Na figura 3.1 é representada a configuração da viga considerada e os respectivos deslocamentos transversais da excitação passiva do encastramento e resposta.

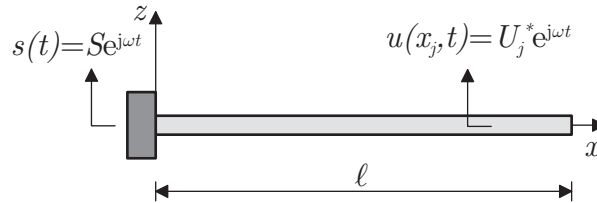


Figura 3.1: Viga encastrada-livre: deslocamentos transversais da excitação e da resposta

3.4 Procedimento experimental

Para a determinação experimental das funções de resposta em frequência do tipo transmissibilidade, a viga representativa do provete é montada na cabeça de um shaker electromagnético com condições de fronteira encastrada-livre e o encastramento é sujeito a uma excitação passiva através de um deslocamento imposto pelo shaker electromagnético. A medição do movimento imposto pelo shaker e do movimento de resposta da viga permite a determinação por via experimental da função de resposta em frequência de tipo transmissibilidade entre diferentes secções do provete e o encastramento.

Na figura 3.2 é apresentado um esquema representativo da montagem experimental e dos equipamentos utilizados.

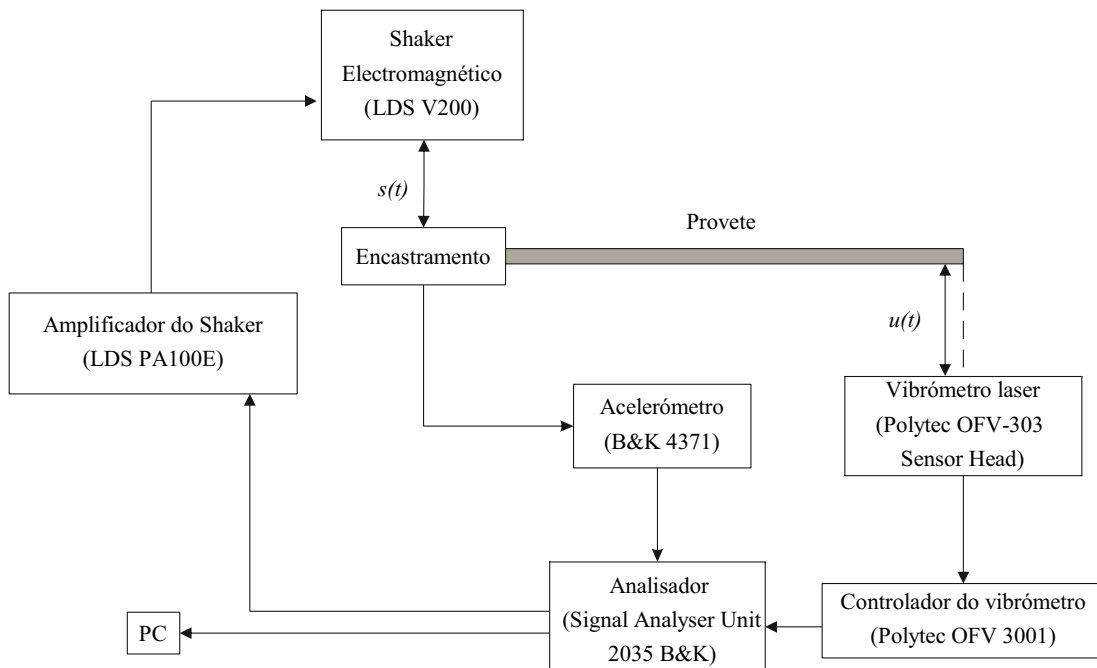


Figura 3.2: Esquema da montagem experimental [12]

O procedimento experimental é iniciado com a geração do sinal de excitação, ruído branco, a partir do módulo gerador do analisador dinâmico de sinal (*Signal Analyser Unit Type 2035 B&K*) seguindo para o amplificador de sinal (*LDS PA100E*) que é responsável pela regulação do ganho de sinal. O sinal amplificado é enviado para o shaker electromagnético (*LDS V200*) que excita a viga passivamente através de um deslocamento imposto à secção encastrada na direcção transversal.

O movimento imposto ao encastramento, designado por $s(t)$, é medido sob a forma de aceleração através de um acelerómetro (*B&K 4371*).

O movimento de resposta forçada do provete na secção desejada é medido por um vibrómetro laser (*Polytec OFV 303 Sensor Head*) em termos de velocidade, $\dot{u}(t)$, sendo o sinal enviado para o controlador do vibrómetro (*Polytec OFV 3001*).

Os sinais relativos à excitação e à resposta são adquiridos e tratados pelo analisador dinâmico de sinal, sendo o sinal correspondente à aceleração integrado duas vezes e o sinal correspondente à velocidade integrado uma vez, de forma a serem convertidos em deslocamentos. A função

de resposta em frequência do tipo transmissibilidade é então obtida através da razão entre o espectro do movimento de resposta na secção em análise e o espectro do movimento do encastramento,

$$T^x(\omega) = \frac{\tilde{U}(\omega)}{\tilde{S}(\omega)} \quad (3.11)$$

onde $\tilde{U}(\omega)$ e $\tilde{S}(\omega)$ representam as transformadas de Fourier do deslocamento transversal medido no ponto de resposta, $u(t)$, e do movimento do encastramento, $s(t)$, respectivamente.

Por fim, as funções transmissibilidade determinadas são armazenadas num PC para posterior análise.

Os equipamentos utilizados na realização dos ensaios experimentais são apresentados nas figuras 3.3 - 3.8.



Figura 3.3: Analisador dinâmico de sinal - *Signal Analyser Unit Type 2035 B&K* [12]



Figura 3.4: Amplificador do shaker - *LSD PA100E* [12]

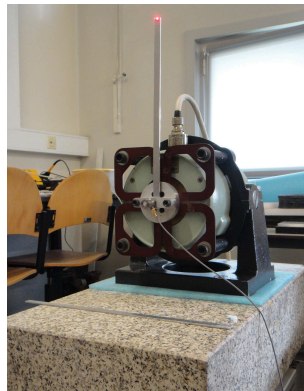


Figura 3.5: Shaker electromagnético - *LDS V200* [12]

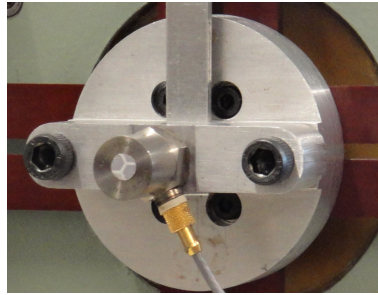


Figura 3.6: Acelerómetro - *B&K 4371* [12]



Figura 3.7: Vibrómetro laser - *Polytec OFV 303 Sensor Head* [12]



Figura 3.8: Controlador do vibrómetro laser - *Polytec OFV 3001* [12]

3.5 Frequências de controlo

As frequências de controlo são frequências discretas para as quais a função definida pelo desvio, entre as funções de resposta em frequência experimental e numérica, é minimizada de modo a ajustar os parâmetros do modelo constitutivo.

A selecção das frequências de controlo na vizinhança das ressonâncias permite uma melhor caracterização da resposta dinâmica do sistema e a redução de possíveis erros devido a perturbações da função de resposta em frequência por ruído experimental. Além disso, na vizinhança das ressonâncias a função de resposta em frequência apresenta, normalmente, um elevado rácio de sinal/ruído.

No trabalho desenvolvido em [12], o critério de selecção das frequências de controlo foi estabelecido de acordo com:

- Localização das frequências de controlo na banda das ressonâncias, uma vez que estas permitem uma melhor caracterização da resposta dinâmica do sistema em análise e um bom rácio sinal/ruído;

- Utilização de um número reduzido de frequências de controlo de modo a aliviar o processo de optimização para identificação dos parâmetros do modelo constitutivo;
- As frequências de controlo seleccionadas são definidas pelo valor mínimo e máximo da parte real da função transmissibilidade experimental e pelo máximo absoluto da parte imaginária.

Na figura 3.9 são apresentadas as frequências seleccionadas nas partes real e imaginária da função transmissibilidade com o presente método de identificação inverso.

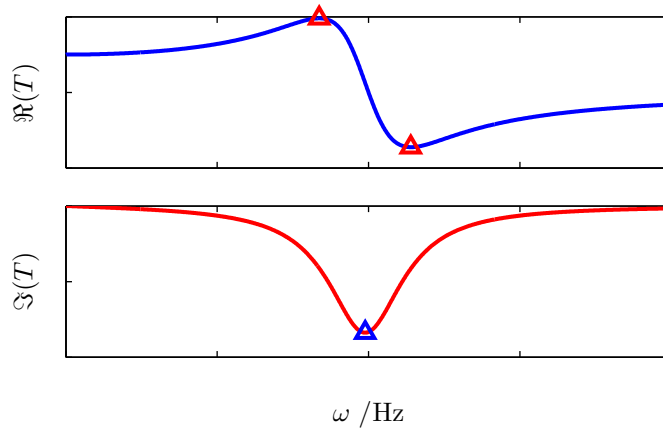


Figura 3.9: Frequências de controlo

3.6 Modelo constitutivo

Neste trabalho, utilizou-se como modelo constitutivo para o material viscoelástico, o modelo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros apresentado no capítulo 2. Por uma questão de sequência na apresentação do método de identificação, repete-se aqui o modelo constitutivo,

$$\bar{G}(j\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (3.12)$$

A utilização deste modelo decorre do facto de o modelo se revelar adequado e representativo do comportamento constitutivo de materiais viscoelásticos [15] e [18].

3.7 Função de minimização

A identificação dos parâmetros do modelo constitutivo é realizada com base na minimização da função definida pela soma dos desvios entre as componentes real e imaginária das funções transmissibilidade numérica e experimental, avaliadas para cada uma das frequências de controlo ω_k , e dada por,

$$\sum_k^{k_{max}} |\Re(T_{ij}(\omega_k) - T_{ij}^x(\omega_k)) + \Im(T_{ij}(\omega_k) - T_{ij}^x(\omega_k))| \quad (3.13)$$

sendo k_{max} o número total de frequências de controlo e $T_{ij}(\omega_k)$ e $T_{ij}^x(\omega_k)$ as funções transmissibilidade, respectivamente numérica e experimental, para a frequência de controlo ω_k .

O algoritmo de minimização utilizado cumpre o procedimento do algoritmo de Nelder-Mead, implementado no software *Matlab*[®] através da função de minimização *fminsearch*. Refira-se que, uma vez que o algoritmo é um método de optimização sem restrições, os resultados apenas serão válidos se, no final do processo de minimização, se verificarem as seguintes condições [19]:

$$G_{\infty} > G_0, \quad \tau > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.14)$$

3.8 LAC - “Local Amplitude Criterion”

Para avaliar a qualidade do processo de identificação, é utilizado um indicador de correlação para funções de resposta em frequência que permite quantificar em termos numéricos o nível de correlação entre as funções de transmissibilidade geradas numericamente e experimentais.

O indicador local LAC permite avaliar o nível de correlação individual para cada grau de liberdade em função da frequência, sendo definido como,

$$LAC_{ij}(\omega) = \frac{2 |T_{ij}^{x^H}(\omega) T_{ij}(\omega)|}{(T_{ij}^{x^H}(\omega) T_{ij}^x(\omega)) + (T_{ij}^H(\omega) T_{ij}(\omega))} \quad (3.15)$$

onde $T_{ij}^x(\omega)$ e $T_{ij}(\omega)$ são, respectivamente, a transmissibilidade de deslocamento experimental e numérica em função da frequência entre os graus de liberdade i e j . O operador $(\bullet)^H$ representa a transposição do complexo conjugado.

O LAC é um indicador que compara o nível de correlação entre duas funções de resposta em frequência em função da frequência, obtendo-se um valor para o nível de correlação compreendido entre 0 (nenhuma correlação) e 1 (correlação perfeita).

3.9 Descrição do processo

Nas figuras 3.10 e 3.11 apresenta-se um fluxograma do processo de identificação inversa dos parâmetros do modelo constitutivo para caracterização das propriedades do material viscoelástico com base no modelo de elementos finitos e nas funções de transmissibilidade.

Na figura 3.10 é apresentada a primeira fase do método inverso, na qual são introduzidos os dados geométricos do provete compósito, as propriedades das camadas elásticas e viscoelásticas e a discretização, e são determinadas as matrizes espaciais de massa global M e as matrizes de rigidez K_e e K_v , que correspondem à matriz de rigidez das camadas elásticas e à matriz de rigidez elástica da camada viscoelástica, respectivamente. Refira-se que a matriz de rigidez das camadas viscoelásticas apresenta o módulo complexo factorizado, ou seja, é calculada para um módulo unitário, $\bar{E}(\omega) = 1$.

Na fase de identificação propriamente dita, ilustrada na figura 3.11, é definido o modelo constitutivo do material viscoelástico baseado no modelo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros, e é definida a estimativa dos parâmetros do modelo.

Após a selecção adequada das frequências de controlo, é iniciado o processo iterativo no qual o resíduo entre as funções transmissibilidade numérica e experimental é avaliado para cada uma das frequências de controlo e os parâmetros do modelo vão sendo optimizados. O processo é repetido até que o resíduo seja inferior a um certo valor de tolerância ou o número máximo de iterações seja excedido.

O processo termina com a identificação dos parâmetros óptimos do modelo constitutivo, com os quais são calculados o módulo de ganho de corte, $G(\omega)$, e o factor de perda, $\eta(\omega)$, ao longo de toda a banda de frequências em estudo. É ainda realizada uma análise comparativa

das funções transmissibilidade numérica e experimental recorrendo ao indicador de correlação local LAC.

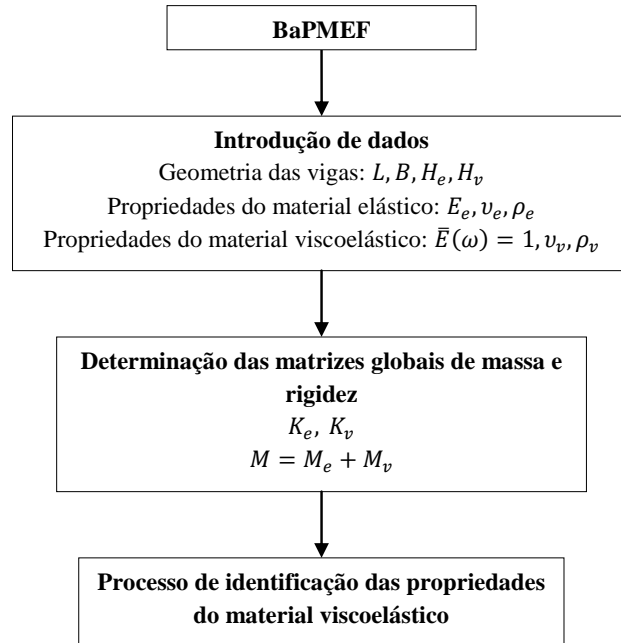


Figura 3.10: Fluxograma do processo de identificação - I

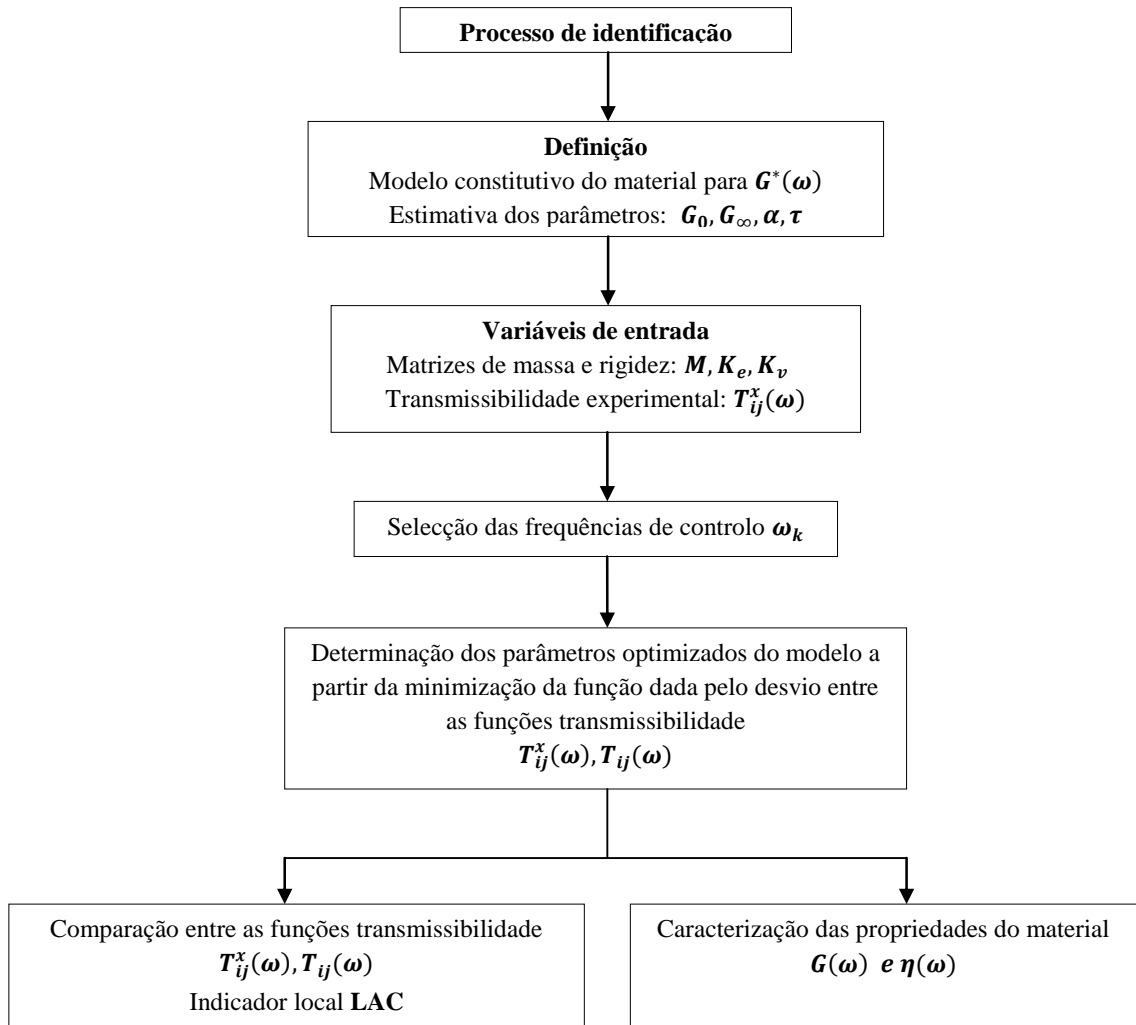


Figura 3.11: Fluxograma do processo de identificação - II

3.10 Provetes

De seguida, são apresentados os provetes utilizados, as suas dimensões, configuração e parâmetros das malhas de elementos finitos. Para a caracterização das propriedades do material viscoelástico, foram utilizados três provetes representativos da configuração de tratamento integrado ou configuração *sandwich* com as faces em alumínio e o núcleo em material viscoelástico ISD112.

3.10.1 Propriedades geométricas e materiais

Na tabela 3.1 apresentam-se as propriedades geométricas dos diferentes provetes, e na tabela 3.2 as propriedades dos materiais.

Tabela 3.1: Propriedades geométricas dos provetes

Provete	Comprimento /mm	$h_a/h_v/h_a$ /mm	Largura /mm
P180	180	1/0.127/1	10
P220	220	1/0.127/1	10
P300	300	1/0.127/1	10

Tabela 3.2: Propriedades dos materiais dos provetes

Material	E/Pa	ν	$\rho /kg \cdot m^{-3}$
Alumínio	61×10^9	0.3	2543
Viscoelástico 3M ISD112	-	0.49	1140

Refira-se que, a espessura da viga *sandwich* é dada pela soma da espessura de duas camadas de material elástico ($1\text{ mm} + 1\text{ mm}$) e da espessura da camada de material viscoelástico ISD112 que é de 0.127 mm . Além disso, o comprimento real dos provetes tem uma extensão de 15 mm , que corresponde ao comprimento de encastramento, de forma que o comprimento apresentado na tabela 3.1 representa o comprimento livre do provete encastrado-livre.

3.10.2 Modelo de elementos finitos

Os diferentes provetes analisados foram discretizados de modo que cada elemento apresentasse um comprimento igual a 5 mm . Os parâmetros das malhas de elementos finitos estão apresentados na tabela 3.3.

Tabela 3.3: Discretização dos provetes

Provete	$nuels$	$nutnos$	$nunos$	$ndof$	$ndofe$	$ndofa$
P180	36	37	2	5	10	180
P220	44	45	2	5	10	220
P300	60	61	2	5	10	300

em que, $nuels$ representa o número de elementos do provete, $nutnos$ o número de nós, $nunos$ o número de nós por elemento, $ndof$ o número de graus de liberdade por nó, $ndofe$ o número de

graus de liberdade por elemento, e *ndofa* o número de graus de liberdade activos do provete.

3.10.3 Transmissibilidades a $T \approx 24^\circ\text{C}$

As funções transmissibilidade medidas conforme descrito na secção 3.4 para os três provetes são apresentadas nas figuras 3.12, 3.13 e 3.14.

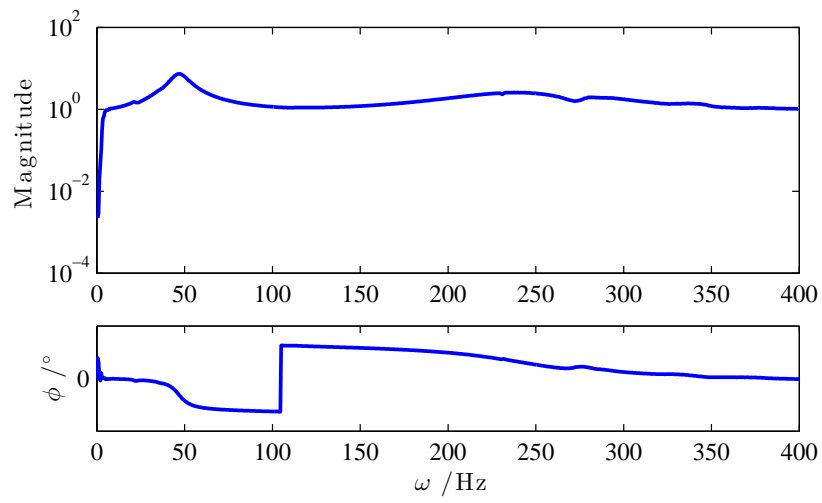


Figura 3.12: Transmissibilidade experimental do provete P180 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

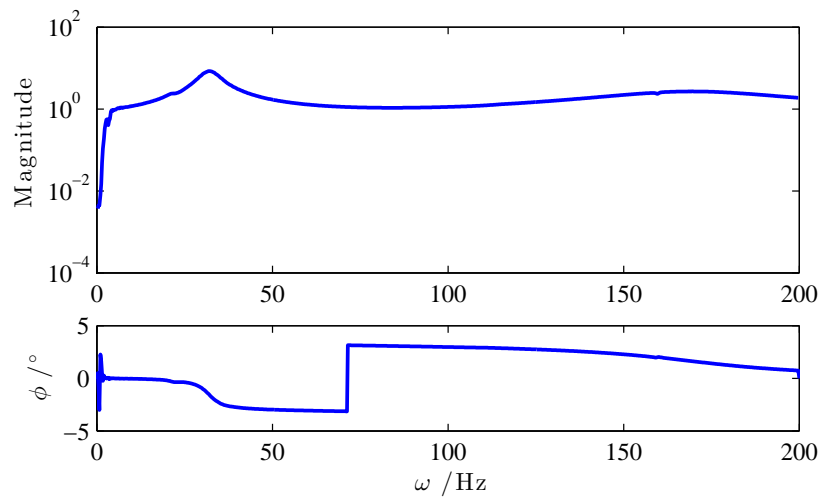


Figura 3.13: Transmissibilidade experimental do provete P220 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

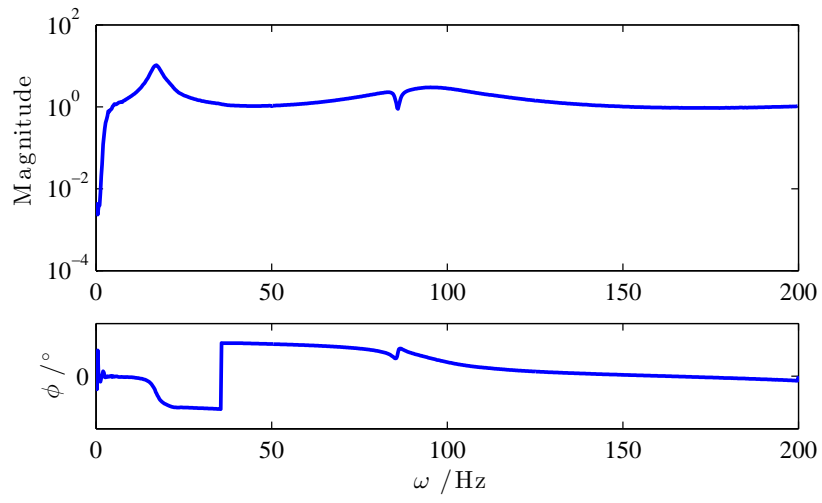


Figura 3.14: Transmissibilidade experimental do provete P300 - $T \approx 24^\circ\text{C}$

Capítulo 4

Processo de optimização

4.1 Introdução

A nível da optimização, com vista a uma melhor caracterização das propriedades do material partindo de resultados mais precisos para os parâmetros do modelo constitutivo, foram definidos algoritmos de identificação baseados num processo de identificação bietápico. O algoritmo de identificação é baseado na minimização do desvio entre as funções transmissibilidade numérica e experimental, recorrendo à função de minimização disponível pelo software *Matlab*[®], *fminsearch*, determinado para um conjunto de frequências de controlo, ω_k , definidas com base num novo critério de selecção.

4.2 Frequências de controlo

A primeira modificação introduzida consistiu na alteração da selecção das frequências de controlo que, anteriormente definidas pelo máximo e mínimo da parte real e máximo absoluto da parte imaginária da função transmissibilidade, são agora definidas por todas as frequências de uma banda genérica definida pelos limites ω_1 e ω_2 e situada na zona de ressonância como se pode ver pela figura 4.1.

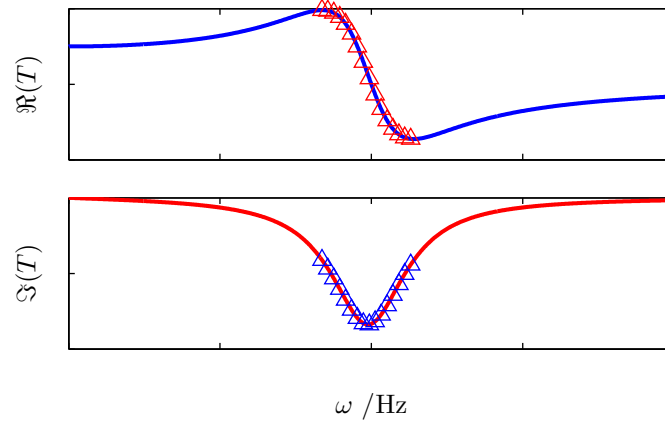


Figura 4.1: Selecção das frequências de controlo nas partes real e imaginária da função transmissibilidade

Os valores obtidos para os parâmetros do modelo constitutivo com o processo de identificação inversa, utilizando diferentes bandas de frequências de controlo na zona de ressonância, para cada um dos provetes, são apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros do modelo constitutivo com selecção de todas as frequências

Proвете	ω_1/Hz	ω_2/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	43.5	51	8.163×10^4	6.335×10^7	0.686	8.720×10^{-6}
	41.5	56	-5.429×10^5	1.432×10^7	0.477	3.060×10^{-5}
	39	58	1.712×10^4	2.245×10^7	0.668	3.770×10^{-5}
	31.5	64	-3.887×10^5	1.269×10^8	0.483	2.810×10^{-7}
	26	70.5	-4.614×10^5	1.051×10^8	0.462	2.970×10^{-7}
	24.5	78.5	-1.324×10^5	2.233×10^8	0.573	3.600×10^{-7}
P220	29	35	9.579×10^4	6.601×10^7	0.696	9.800×10^{-6}
	30.75	32.25	8.963×10^4	7.040×10^7	0.693	8.820×10^{-6}
	30	34.75	8.165×10^4	6.290×10^7	0.685	9.650×10^{-6}
	23.75	42.75	-1.220×10^6	1.160×10^7	0.307	1.520×10^{-5}
	32	40	-1.130×10^6	9.680×10^6	0.329	3.490×10^{-5}
	12.5	58.25	-5.889×10^4	2.110×10^8	0.593	5.410×10^{-7}
P300	15	19.5	1.139×10^5	4.604×10^7	0.647	7.000×10^{-6}
	14.5	21	1.092×10^5	4.133×10^7	0.641	7.832×10^{-6}
	11.75	22.75	1.156×10^5	4.065×10^7	0.649	8.674×10^{-6}
	12	25.5	1.021×10^5	5.197×10^7	0.631	4.927×10^{-6}
	8.25	30	9.790×10^4	6.741×10^7	0.624	2.992×10^{-6}
	6.25	57	9.896×10^4	2.588×10^7	0.631	1.522×10^{-5}

Em vez de se utilizar uma banda *aleatória*, utilizou-se igualmente uma banda de frequências de controlo ainda situada na ressonância, mas agora definida pelos limites correspondentes ao máximo e mínimo da parte real da função transmissibilidade, definidos respectivamente por ω_A e ω_B . Os resultados obtidos para os diferentes provetes estão apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros do modelo na banda de frequências situada entre o máximo e mínimo da parte real da função transmissibilidade

Provete	ω_A/Hz	ω_B/Hz	n	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	42	53	23	9.426×10^4	6.308×10^7	0.693	9.230×10^{-6}
P220	29.25	35.25	25	9.026×10^4	6.910×10^7	0.691	8.780×10^{-6}
P300	15.75	18.5	12	1.273×10^5	4.378×10^7	0.665	8.963×10^{-6}

em que n representa o número de frequências disponíveis e consideradas em cada banda $[\omega_A; \omega_B]$.

Os resultados da tabela 4.1 revelam uma grande inconsistência dos valores dos parâmetros do modelo constitutivo e, por vezes, são obtidos valores negativos para o parâmetro G_0 , normalmente quando são seleccionadas bandas de maior largura, o que pode ser explicado pelo maior número de frequências de controlo seleccionadas, dificultando o processo de optimização. Estes resultados tornam inválida a identificação dos parâmetros não permitindo, nestas condições, a correcta caracterização do módulo complexo. No caso do provete P300, os resultados são bastante satisfatórios, como se pode ver pela tabela 4.1, não tendo sido obtidos valores negativos para o parâmetros G_0 em nenhuma banda.

Por sua vez, os resultados da tabela 4.2 apresentam uma melhor consistência quando se utiliza a primeira ressonância, o que não acontece com a segunda ressonância, conforme resultados apresentados no Apêndice D.

4.2.1 Frequências de controlo com restrição da banda

Com base nos resultados obtidos, tornou-se então necessário definir um novo critério para a escolha das frequências de controlo que permitisse reduzir, até mesmo evitar se possível, o número de casos com resultados negativos para o parâmetro G_0 .

Para tal, a banda de frequências de controlo passou a ser uma banda estreita, no sentido em que está contida na banda definida pelo máximo e mínimo da parte real da função transmissibilidade, e garantindo a inclusão do máximo absoluto da parte imaginária (ω_R) como uma das frequências de controlo. Os resultados obtidos para diferentes bandas estreitas de frequências para o provete P220 são apresentados na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros do modelo para o provete P220 com restrição da banda

ω_A/Hz	ω_R/Hz	ω_B/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
29.25	32	35.25	9.026×10^4	6.910×10^7	0.691	8.780×10^{-6}
30.75	32	33.25	1.019×10^5	8.978×10^7	0.698	6.430×10^{-6}
31.25	32	32.25	9.164×10^4	6.771×10^7	0.694	1.040×10^{-5}
30.25	32	34	8.718×10^4	6.144×10^7	0.691	1.047×10^{-5}
29.5	32	35.25	-1.308×10^5	4.705×10^7	0.568	5.600×10^{-6}
30.75	32	35.25	-1.361×10^5	2.526×10^7	0.569	1.740×10^{-5}

É possível observar que os valores dos parâmetros melhoraram, reduzindo-se significativamente o número de casos com resultados negativos para o parâmetro G_0 . No entanto, a ocorrência desta situação não é satisfatória e justifica a necessidade de melhoramento do algoritmo de identificação.

4.3 Algoritmo G_0 G_∞ α τ

Os resultados anteriormente apresentados foram determinados considerando o processo de identificação previamente estabelecido, designado a partir de agora por algoritmo G_0 G_∞ α τ (tabela 4.4), definido por uma única etapa de otimização em que os quatro parâmetros do modelo são otimizados simultaneamente.

Tabela 4.4: Algoritmo G_0 G_∞ α τ

Algoritmo	Parâmetros otimizados
G_0 G_∞ α τ	$G_0, G_\infty, \alpha, \tau$

Face aos resultados obtidos, foi desenvolvido um estudo sobre o provete P220 considerando duas bandas de frequências com resultados bastantes distintos, de modo a tentar compreender a inconsistência dos resultados obtidos na identificação dos parâmetros do modelo e na caracterização das propriedades do material. Para tal, foram desenvolvidas as seguintes análises:

- Representação da taxa de variação dos parâmetros do modelo constitutivo no processo de identificação;
- Determinação das funções de resposta em frequência de tipo transmissibilidade experimentais e numéricas, indicador local LAC, e propriedades do material viscoelástico.

4.3.1 Parâmetros do modelo constitutivo

Com o algoritmo de identificação G_0 G_∞ α τ , foram identificados os parâmetros do modelo constitutivo considerando duas bandas de frequências situadas na vizinhança da primeira ressonância. Os resultados são apresentados na tabela 4.5.

Tabela 4.5: Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo G_0 G_∞ α τ

Algoritmo	ω_1/Hz	ω_2/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
G_0 G_∞ α τ	29.25	35.25	9.026×10^4	6.910×10^7	0.691	8.780×10^{-6}
	29.5	35.25	-1.308×10^5	4.705×10^7	0.568	5.600×10^{-6}

Na figura 4.2 é apresentada a taxa de variação dos parâmetros para a primeira banda de frequências considerada ([29.25 35.25] Hz), e na figura 4.3 para a segunda banda ([29.5 35.25] Hz), durante o processo de identificação. As taxas de variação são determinadas para a primeira frequência da banda considerada.

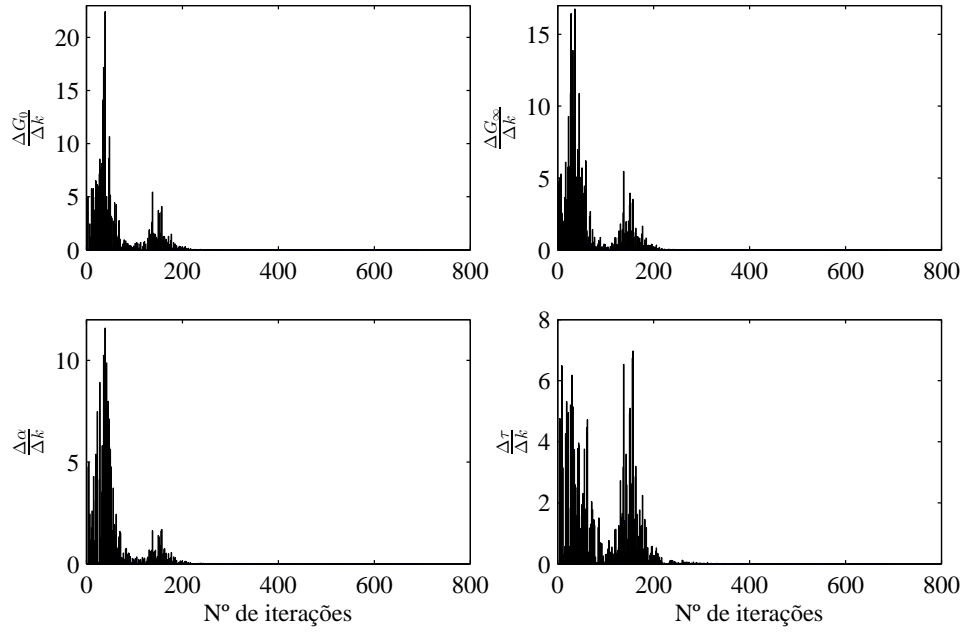


Figura 4.2: Taxa de variação dos parâmetros do modelo na banda de frequências [29.25 35.25] Hz com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$

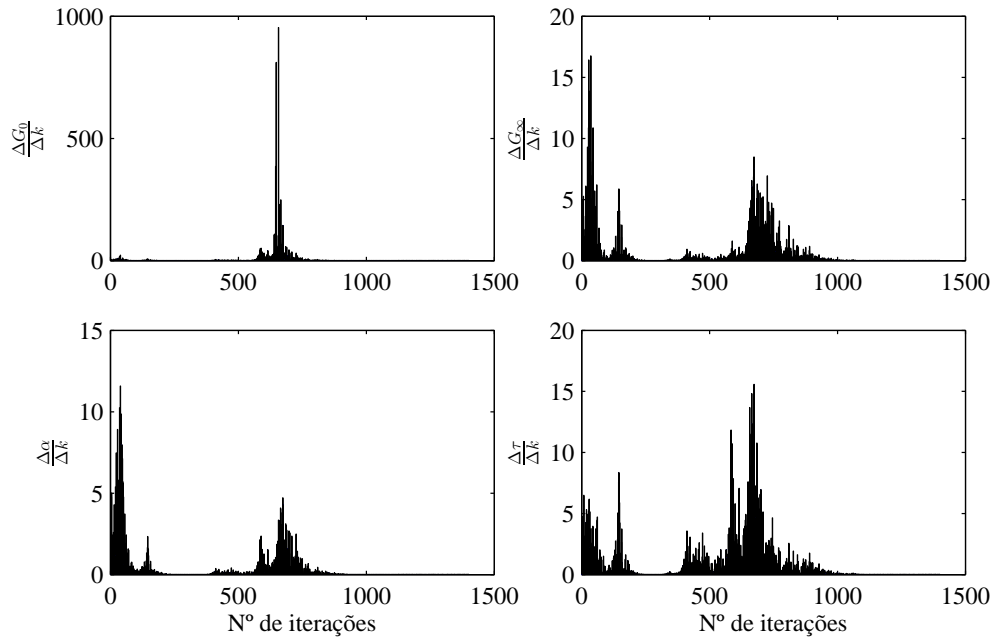


Figura 4.3: Taxa de variação dos parâmetros do modelo na banda de frequências [29.5 35.25] Hz com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$

Analisando os resultados, é possível verificar que os parâmetros G_∞ , α e τ apresentam taxas de variação aproximadamente iguais para as duas bandas consideradas. Para o parâmetro G_0 , porém, já se verifica uma grande alteração na taxa de variação com a banda de frequências considerada, e que para certas bandas, como no caso de $[29.5 \ 35.35]$ Hz, apenas é obtida a sua convergência quando já apresenta valores negativos, causando a divergência dos restantes parâmetros no final do processo e conduzindo a resultados fisicamente inconsistentes.

Verifica-se igualmente que os valores máximos das taxas de variação de cada parâmetro do modelo constitutivo são superiores para o caso da segunda banda considerada, o que evidencia também a maior dificuldade na optimização dos parâmetros do modelo durante o processo iterativo devido ao parâmetro G_0 , que não permitirá a convergência dos restantes parâmetros para valores adequados.

4.3.2 Função de resposta em frequência/LAC/Propriedades do material

As funções transmissibilidade numérica e experimental e o indicador local LAC são apresentadas nas figuras 4.4 e 4.5 para a primeira banda de frequências considerada ($[29.25 \ 35.25]$ Hz), e nas figuras 4.6 e 4.7 para a segunda banda ($[29.5 \ 35.25]$ Hz). As propriedades do material, módulo de ganho $G(\omega)$ e factor de perda $\eta(\omega)$, para as bandas consideradas, são ilustradas na figura 4.8.

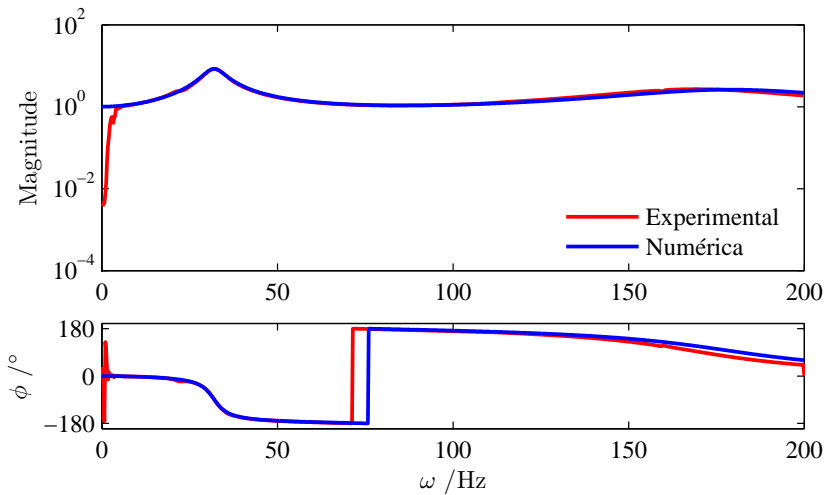


Figura 4.4: Comparação da transmissibilidade experimental e numérica - $[29.25 \ 35.25]$ Hz - $T \approx 24^\circ\text{C}$

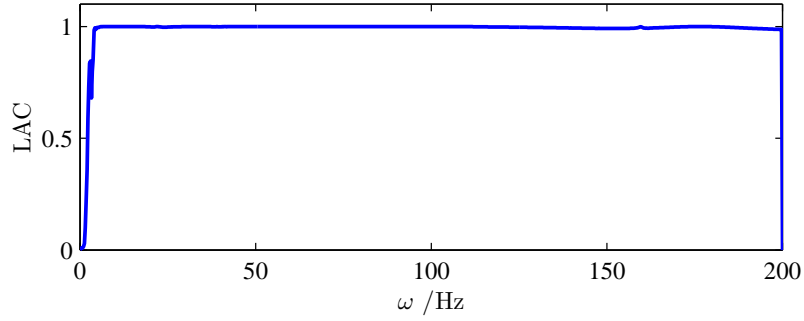


Figura 4.5: Indicador local LAC - [29.25 35.25] Hz

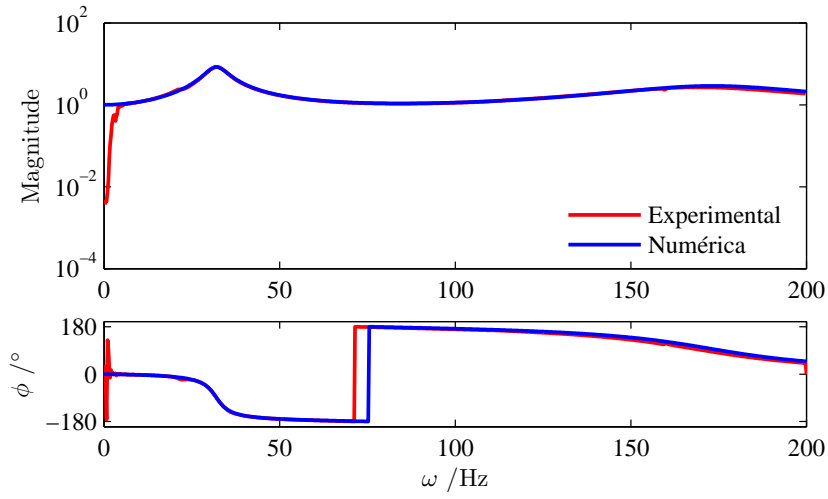
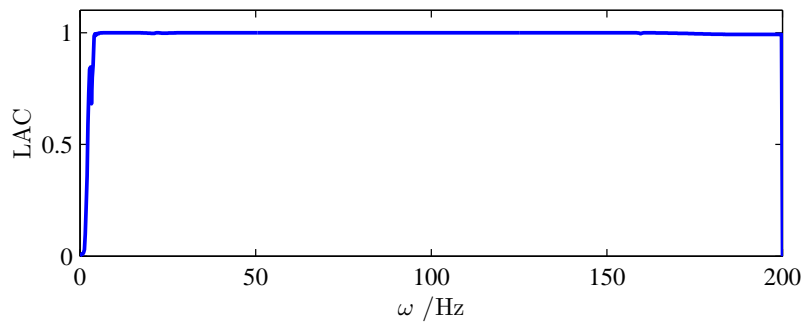
Figura 4.6: Comparação entre a transmissibilidade experimental e numérica - [29.5 35.25] Hz - $T \approx 24^\circ\text{C}$ 

Figura 4.7: Indicador local LAC - [29.5 35.25] Hz

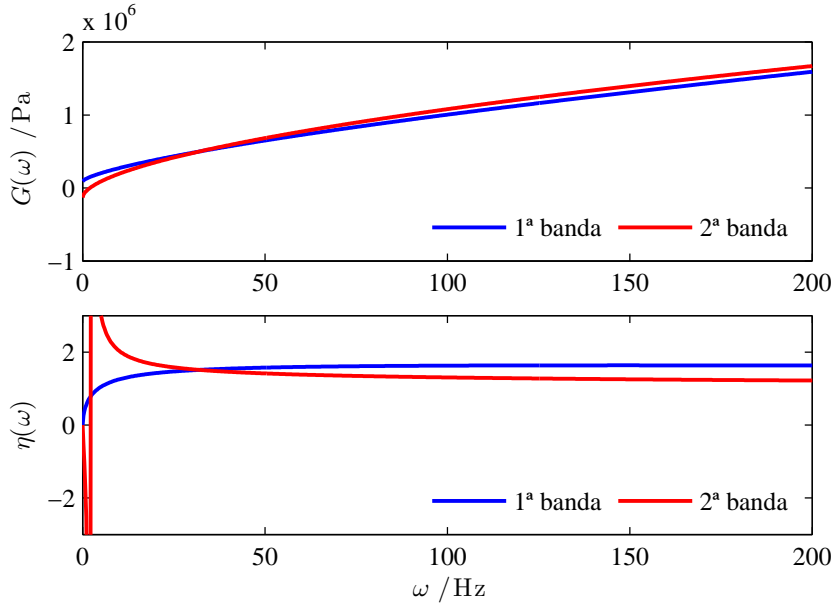


Figura 4.8: Propriedades do material viscoelástico - $[29.25 \ 35.25]$ Hz / $[29.5 \ 35.25]$ Hz - $T \approx 24^\circ\text{C}$

A representação da função transmissibilidade numérica encontra-se dentro do esperado, mesmo no caso da segunda banda, não aparentando ser muito influenciada pelos resultados dos parâmetros, pois não apresenta alterações significativas, havendo sempre uma boa correlação entre esta e a transmissibilidade experimental para toda a banda de frequências analisada, dada pelo indicador local LAC.

Os resultados para o módulo de ganho e factor de perda, no caso da primeira banda analisada, encontram-se dentro do esperado mas no segundo caso, como seria de esperar, devido ao valor negativo do parâmetro G_0 , estas propriedades apresentam valores negativos, tornando inválida a sua caracterização. Refira-se que, para todas as bandas analisadas para as quais foram obtidos valores negativos do parâmetro G_0 , as curvas características de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ são em todo semelhantes às apresentadas para o caso da segunda banda de frequências.

4.4 Algoritmos de identificação

Na perspectiva de melhorar o processo de identificação, foram estabelecidos diferentes algoritmos de identificação definidos por etapas, entre os quais se fizeram variar alguns aspectos, nomeadamente, a ordem das etapas e o número de parâmetros otimizados em cada etapa, com vista à definição de um novo algoritmo, eficiente na identificação dos parâmetros do modelo constitutivo, e pouco sensível a determinados factores, em particular, à selecção das frequências de controlo e à estimativa dos parâmetros.

Os diversos algoritmos desenvolvidos foram definidos por um processo de identificação bietápico, em que a primeira etapa é iniciada com a estimativa dos parâmetros do modelo e são definidos os parâmetros a otimizar. Assim, partindo-se do valor otimizado dos parâmetros

da primeira etapa, procede-se à segunda etapa do processo, que pode ser realizada partindo de valores mais adequados para os parâmetros.

Na tabela 4.6 apresentam-se os diferentes algoritmos definidos e os parâmetros otimizados em cada uma das etapas.

Tabela 4.6: Algoritmos de identificação bietápicos e respectivas etapas

Algoritmo	Parâmetros otimizados	
	1ª Etapa	2ª Etapa
$\alpha \tau - G_0 G_\infty$	α, τ	G_0, G_∞
$G_\infty \alpha \tau - G_0$	G_∞, α, τ	G_0
$\alpha \tau - G_0 G_\infty \alpha \tau$	α, τ	$G_0, G_\infty, \alpha, \tau$
$G_0 G_\infty - \alpha \tau$	G_0, G_∞	α, τ
$\alpha - G_0 G_\infty \tau$	α	G_0, G_∞, τ
$\tau - G_0 G_\infty \alpha$	τ	G_0, G_∞, α

4.4.1 Análise dos resultados

Foram determinados os parâmetros do modelo para o provete P220 referentes a cada um dos algoritmos de identificação para diferentes bandas de frequências, apresentados desde a tabela 4.5 até à tabela 4.9.

Algoritmos $\alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$

Tabela 4.7: Parâmetros do modelo com algoritmos de identificação $\alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$

Algoritmo	ω_1/Hz	ω_2/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
$\alpha \tau - G_0 G_\infty$	20	30	9.436×10^4	1.002×10^8	0.727	7.540×10^{-6}
	29.25	35.25	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
	23.75	42.75	9.799×10^4	1.003×10^8	0.694	5.230×10^{-6}
	13.5	51.75	9.633×10^4	1.003×10^8	0.691	5.070×10^{-6}
	17.75	51.25	9.393×10^4	1.005×10^8	0.689	4.950×10^{-6}
	12.5	58.25	9.500×10^4	1.003×10^8	0.690	4.990×10^{-6}
$G_\infty \alpha \tau - G_0$	20	30	9.838×10^4	7.519×10^7	0.729	1.130×10^{-5}
	29.25	35.25	1.000×10^5	6.807×10^7	0.697	9.440×10^{-6}
	23.75	42.75	9.978×10^4	6.062×10^7	0.698	1.120×10^{-5}
	13.5	51.75	9.843×10^4	6.864×10^7	0.693	8.940×10^{-6}
	17.75	51.25	9.843×10^4	6.718×10^7	0.694	9.240×10^{-6}
	12.5	58.25	9.766×10^4	5.350×10^7	0.694	1.290×10^{-5}

Os resultados obtidos, para o caso do algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ e $G_\infty \alpha \tau - G_0$, revelam uma melhoria substancial relativamente ao algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$, especialmente para o parâmetro G_0 que deixa de apresentar valores negativos para qualquer banda de frequências, encontrando-se os quatro parâmetros de acordo com o esperado.

Refira-se que, os resultados mais satisfatórios, obtidos com os dois algoritmos de identificação definidos, ocorrem para bandas de maior largura, isto é, bandas em que é considerado um maior número de frequências de controlo.

Algoritmos $\alpha \tau - G_0 G_\infty \alpha \tau / G_0 G_\infty - \alpha \tau$

Tabela 4.8: Parâmetros do modelo com algoritmos de identificação $\alpha \tau - G_0 G_\infty \alpha \tau / G_0 G_\infty - \alpha \tau$

Algoritmo	ω_1/Hz	ω_2/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
$\alpha \tau - G_0 G_\infty \alpha \tau$	20	30	-2.600×10^3	1.590×10^8	0.656	1.980×10^{-6}
	29.25	35.25	-1.680×10^5	1.590×10^8	0.546	1.890×10^{-6}
	23.75	42.75	-1.230×10^6	1.380×10^7	0.298	7.140×10^{-6}
	13.5	51.75	-1.067×10^6	1.711×10^7	0.315	3.864×10^{-6}
	17.75	51.25	-8.278×10^5	6.803×10^7	0.337	6.480×10^{-8}
	12.5	58.25	-3.531×10^5	1.844×10^8	0.463	8.490×10^{-8}
$G_0 G_\infty - \alpha \tau$	20	30	-3.360×10^5	2.574×10^7	0.500	1.000×10^{-5}
	29.25	35.25	-3.045×10^5	2.515×10^7	0.500	1.000×10^{-5}
	23.75	42.75	-3.049×10^5	2.513×10^7	0.499	9.930×10^{-6}
	13.5	51.75	-3.032×10^5	2.509×10^7	0.500	9.920×10^{-6}
	17.75	51.25	-3.034×10^5	2.509×10^7	0.500	9.920×10^{-6}
	12.5	58.25	-3.022×10^5	2.504×10^7	0.499	9.930×10^{-6}

Para estes dois algoritmos foram obtidos valores negativos para G_0 em praticamente todas as bandas de frequências analisadas.

No caso do algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty \alpha \tau$, verifica-se que os valores obtidos para α e τ no final da primeira etapa do processo são valores geralmente próximos dos seus valores óptimos. A segunda etapa deste processo de optimização será, uma vez que são optimizados os quatro parâmetros simultaneamente, equivalente ao algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$ com alteração das estimativas de α e τ para os valores obtidos no final da primeira etapa deste algoritmo.

Assim, recorrendo ao algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$, foram alteradas as estimativas de α e τ para os valores obtidos no final da primeira etapa deste algoritmo e verificou-se que praticamente todos os resultados pioraram, revelando que as novas estimativas são inadequadas e conduzem a resultados insatisfatórios.

No caso do algoritmo $G_0 G_\infty - \alpha \tau$, os maus resultados podem ser explicados pelo facto de ser primeiro optimizado o parâmetro G_0 que, como dito anteriormente, é o parâmetro com menor taxa de optimização e o último a convergir durante o processo iterativo.

Algoritmos $\alpha - G_0 G_\infty \tau / \tau - G_0 \alpha G_\infty$ Tabela 4.9: Parâmetros do modelo com algoritmos $\alpha - G_0 G_\infty \tau / \tau - G_0 \alpha G_\infty$

Algoritmo	ω_1/Hz	ω_2/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
$\alpha - G_0 G_\infty \tau$	20	30	1.363×10^5	8.156×10^7	0.758	1.260×10^{-5}
	29.25	35.25	1.926×10^5	6.556×10^7	0.761	1.580×10^{-5}
	23.75	42.75	1.938×10^5	7.269×10^7	0.761	1.380×10^{-5}
	13.5	51.75	1.973×10^5	6.967×10^7	0.763	1.460×10^{-5}
	17.75	51.25	1.920×10^5	5.128×10^7	0.763	2.210×10^{-5}
	12.5	58.25	1.933×10^5	4.680×10^7	0.763	2.470×10^{-5}
$\tau - G_0 \alpha G_\infty$	20	30	-1.307×10^5	2.306×10^8	0.580	4.220×10^{-7}
	29.25	35.25	-3.083×10^5	1.106×10^8	0.484	3.700×10^{-7}
	23.75	42.75	-1.204×10^6	2.840×10^7	0.283	3.490×10^{-7}
	13.5	51.75	-9.972×10^5	3.384×10^7	0.313	3.490×10^{-7}
	17.75	51.25	-8.602×10^5	3.909×10^7	0.336	3.490×10^{-7}
	12.5	58.25	-9.317×10^5	3.591×10^7	0.323	3.490×10^{-7}

Os parâmetros do modelo identificados com estes algoritmos revelaram-se também inadequados, com o parâmetro G_0 a apresentar valores negativos em praticamente todas as bandas consideradas.

4.5 Algoritmos de identificação $\alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$

Face aos resultados obtidos nas secções anteriores com as diferentes variantes desenvolvidas para o algoritmo de identificação bietápico, seleccionaram-se as variantes que conduziram a melhores resultados, nomeadamente os algoritmos $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ e $G_\infty \alpha \tau - G_0$ que são apresentados mais detalhadamente, e com os quais se procedeu à identificação dos parâmetros do modelo constitutivo e à caracterização do módulo complexo do material.

O processo de identificação referente ao algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ é descrito pelas figuras 4.9 e 4.10, e para o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ pelas figuras 4.11 e 4.12.

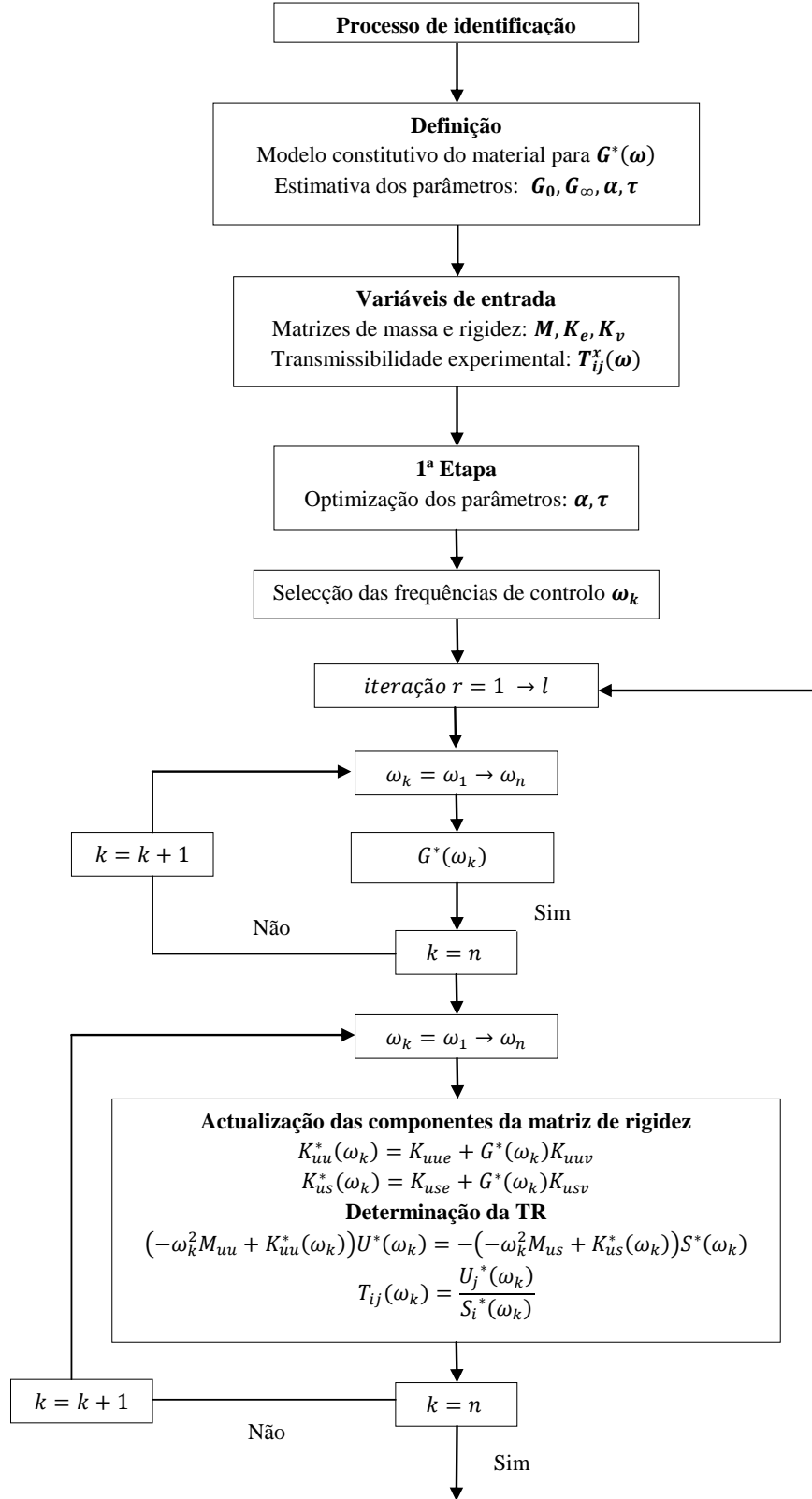
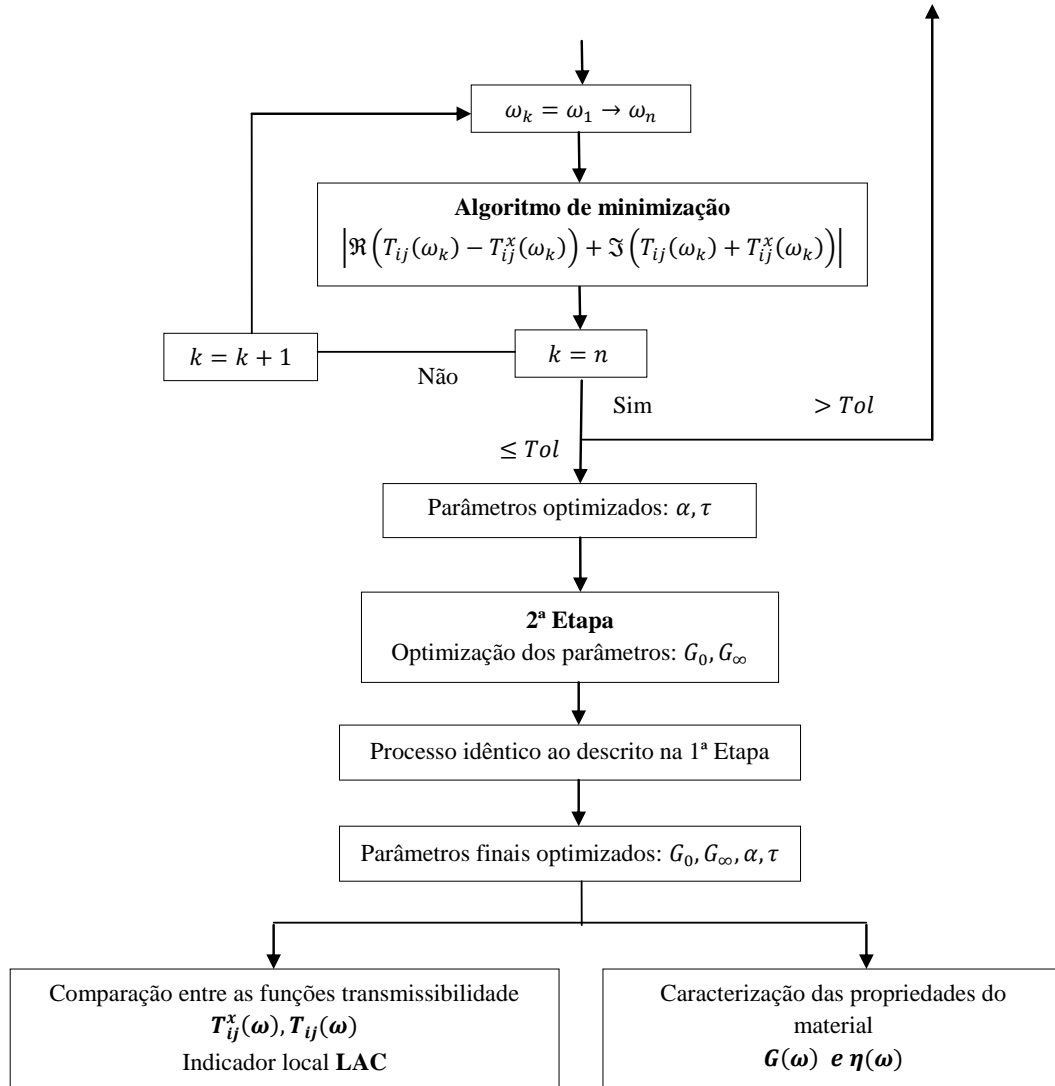
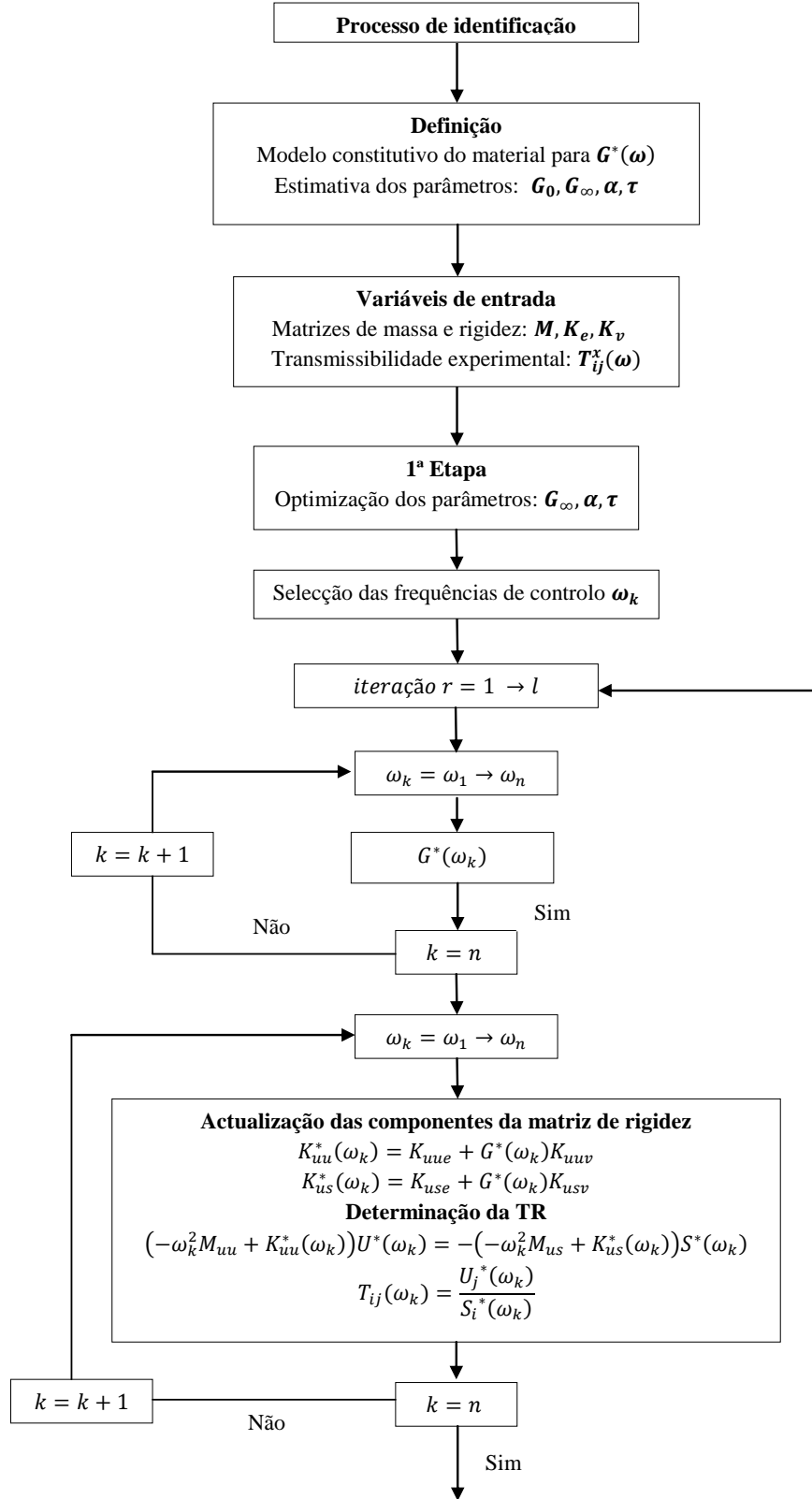
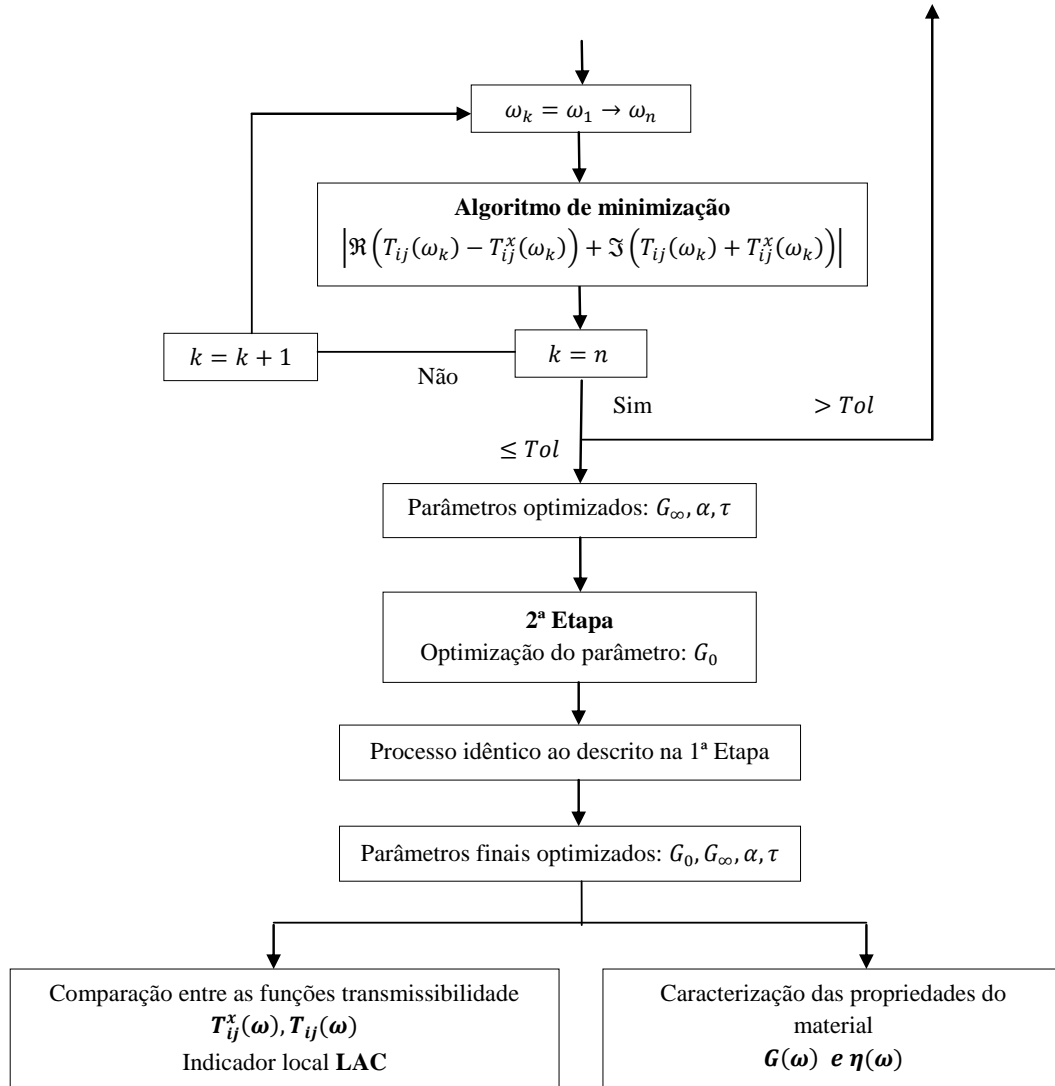


Figura 4.9: Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty - I$

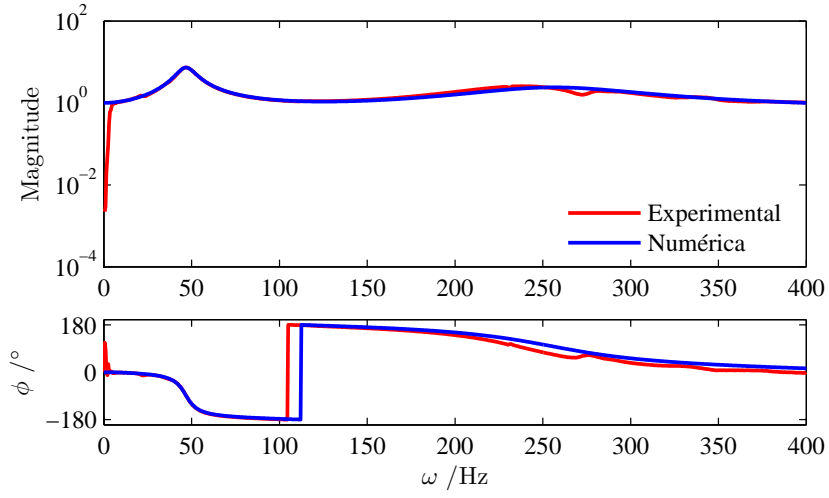
Figura 4.10: Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo α τ - G_0 G_∞ - II

Figura 4.11: Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0 - I$

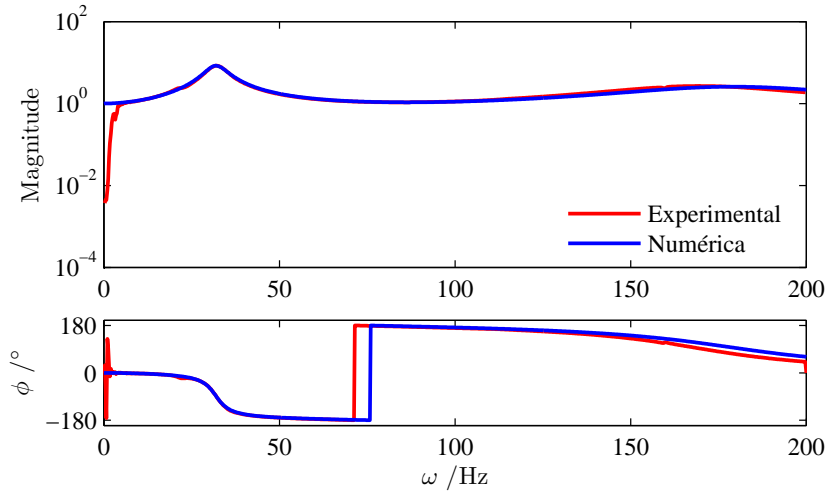
Figura 4.12: Fluxograma do processo de identificação com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - II

4.5.1 Função de resposta em frequência e indicador local LAC

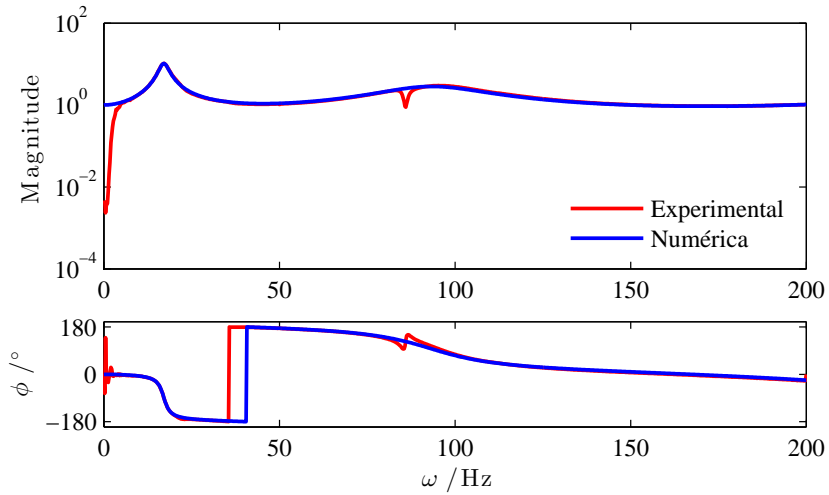
As funções transmissibilidade são ilustradas na figura 4.13 para o algoritmo de identificação $\alpha \tau - G_0 \ G_\infty$, e na figura 4.15 para o algoritmo de identificação $G_\infty \alpha \tau - G_0$. O indicador local LAC é apresentado nas figuras 4.14 e 4.16.



(a) Provete P180

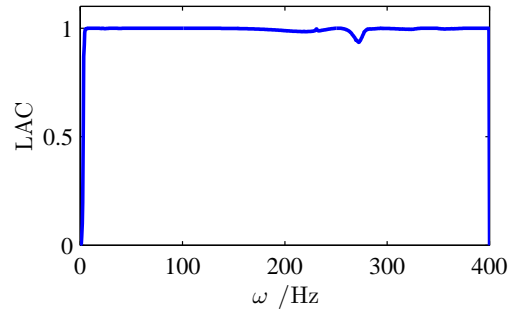


(b) Provete P220

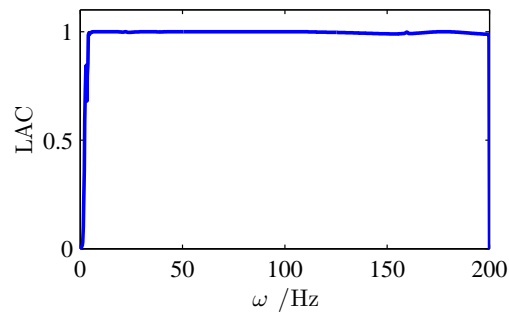


(c) Provete P300

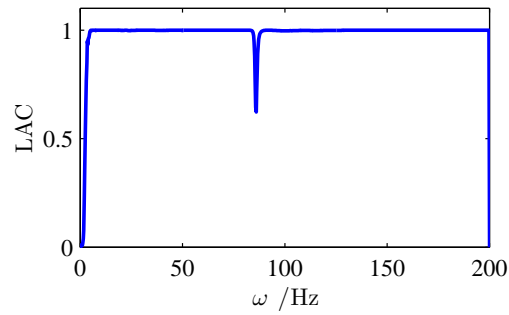
Figura 4.13: Comparação da transmissibilidade experimental e numérica para os diferentes provetes com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$



(a) Provete P180

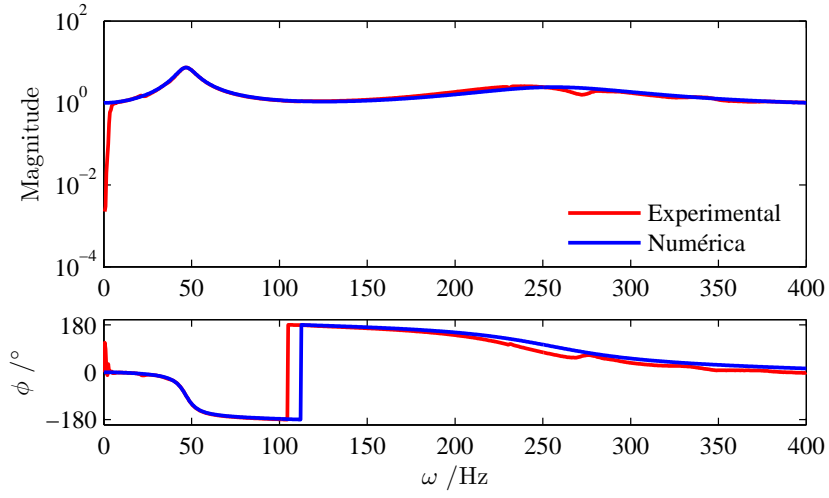


(b) Provete P220

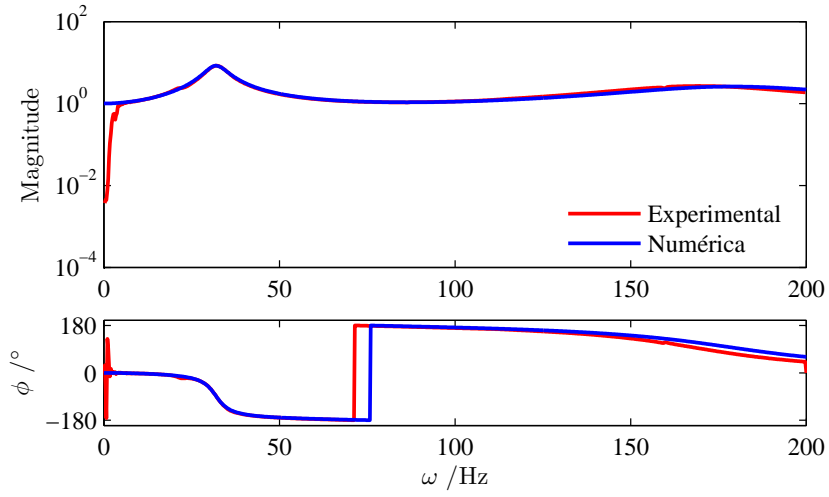


(c) Provete P300

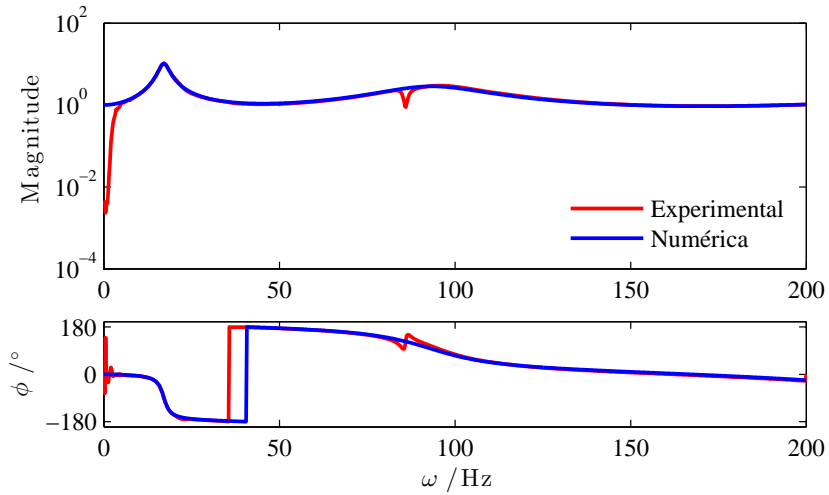
Figura 4.14: Indicador local LAC para os diferentes provetes com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$



(a) Provete P180

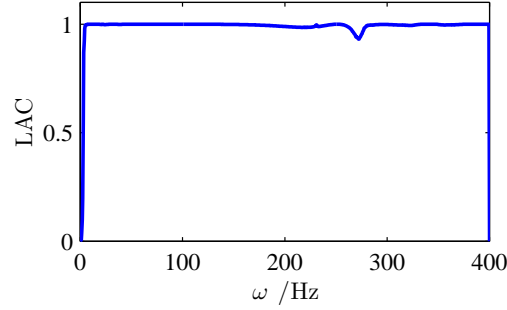


(b) Provete P220

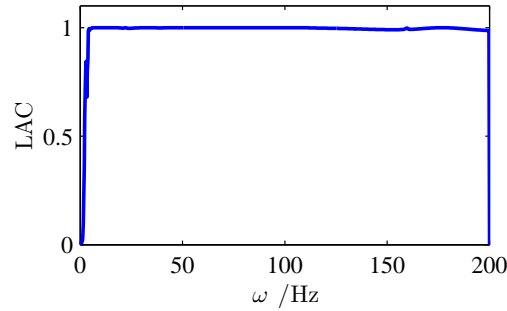


(c) Provete P300

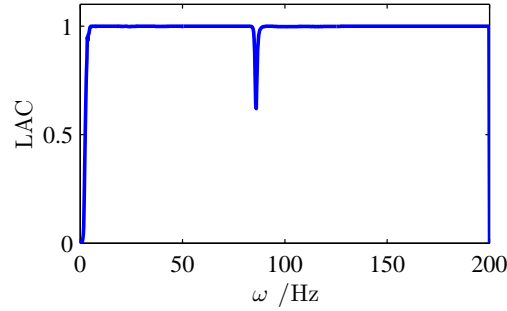
Figura 4.15: Comparação da transmissibilidade experimental e numérica para os diferentes provetes com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$



(a) Provete P180



(b) Provete P200



(c) Provete P300

Figura 4.16: Indicador local LAC para os diferentes provetes com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$

As funções transmissibilidade obtidas numericamente a partir dos dois algoritmos definidos estão de acordo com os resultados da Ref.[12].

A partir do indicador local de correlação LAC, verifica-se uma boa correlação entre as funções transmissibilidade numérica e experimental ao longo de toda a banda de frequências analisada. Apenas o provete P300 apresenta uma fraca correlação para certas frequências (figuras 4.14 e 4.16) devido a uma perturbação verificada na função transmissibilidade experimental.

4.5.2 Propriedades do material viscoelástico

As propriedades do material, $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$, obtidas para os três provetes na vizinhança da primeira ressonância, são apresentadas na figura 4.17 para os algoritmos de identificação considerados.

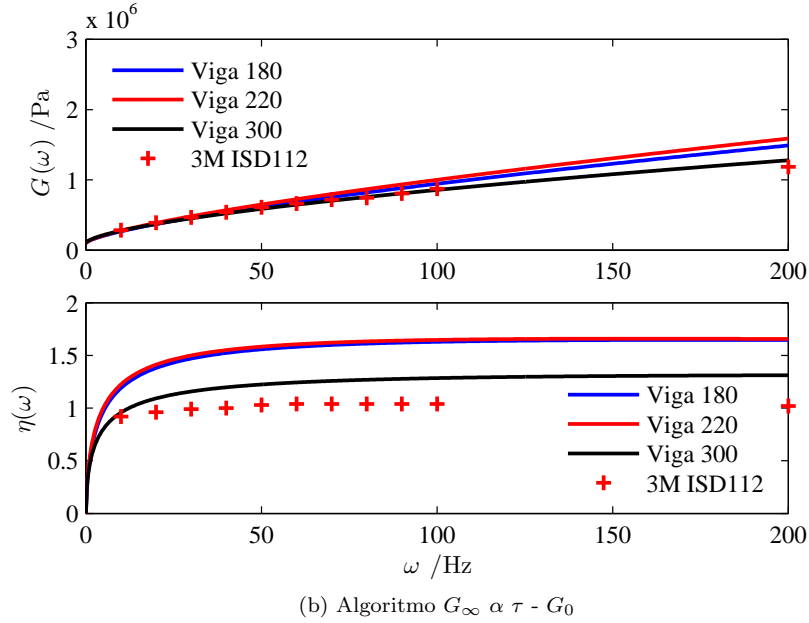
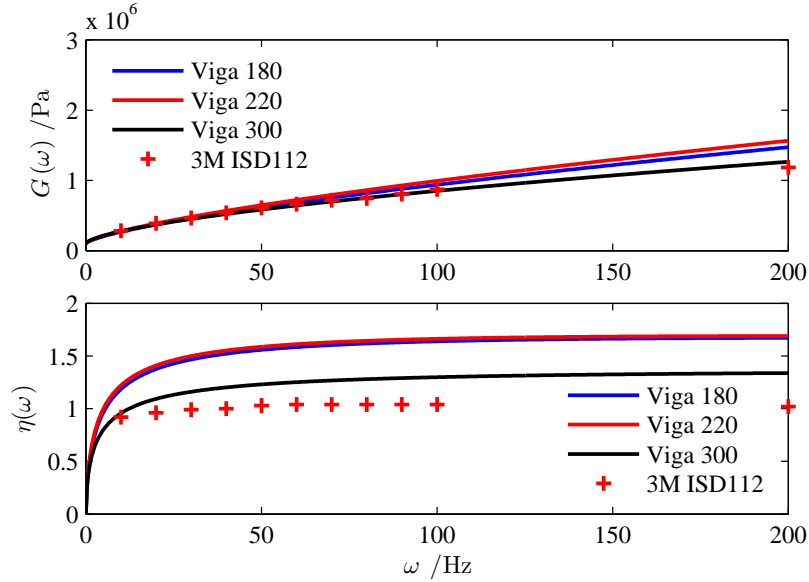


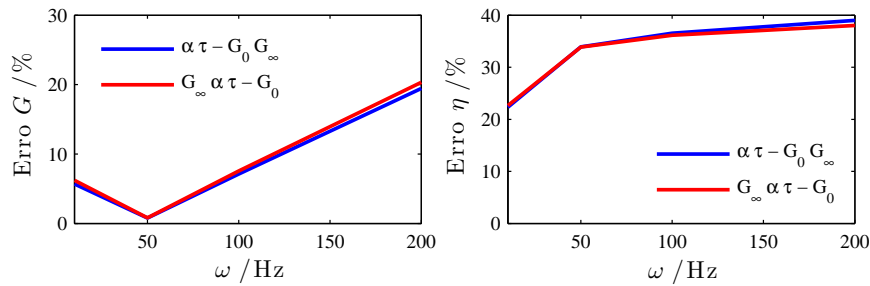
Figura 4.17: Propriedades do material viscoelástico para os diferentes provetes com os algoritmos $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ / $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

Na tabela 4.10 é apresentado o erro cometido na estimativa das propriedades relativamente

ao valor obtido através do nomograma do material [14], para diferentes frequências, com respectiva representação nas figuras 4.18, 4.19 e 4.20, considerando funções transmissibilidade medidas a 24°C.

Tabela 4.10: Erro na determinação de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ - $T \approx 24^\circ\text{C}$

Provete	$\alpha \tau - G_0 G_\infty$		$G_\infty \alpha \tau - G_0$	
	Erro G (%)	Erro η (%)	Erro G (%)	Erro η (%)
$\omega=10\text{Hz}$				
P180	5.68	22.33	6.22	22.65
P220	2.12	24.63	2.49	24.86
P300	2.50	3.75	2.58	3.84
$\omega=50\text{Hz}$				
P180	0.78	33.91	0.82	33.87
P220	5.62	35.12	5.84	34.94
P300	4.45	16.28	4.11	15.85
$\omega=100\text{Hz}$				
P180	7.12	36.55	7.57	36.16
P220	12.14	37.46	12.79	36.86
P300	2.54	19.92	1.90	19.04
$\omega=200\text{Hz}$				
P180	19.43	38.99	20.33	38.04
P220	24.19	39.63	25.27	38.39
P300	6.23	23.76	7.19	22.24

Figura 4.18: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para P180 em função da frequência - $T \approx 24^\circ\text{C}$

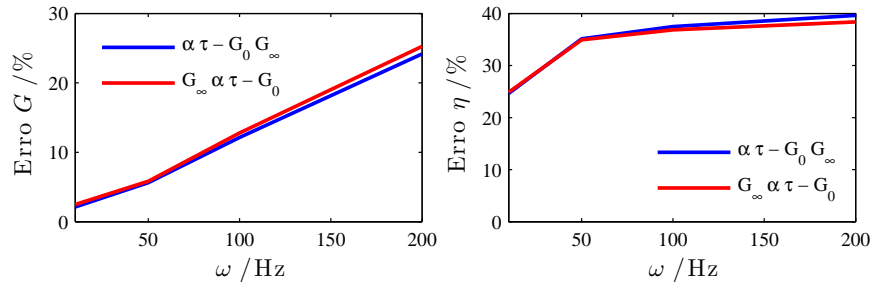


Figura 4.19: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para P220 em função da frequência - $T \approx 24^\circ\text{C}$

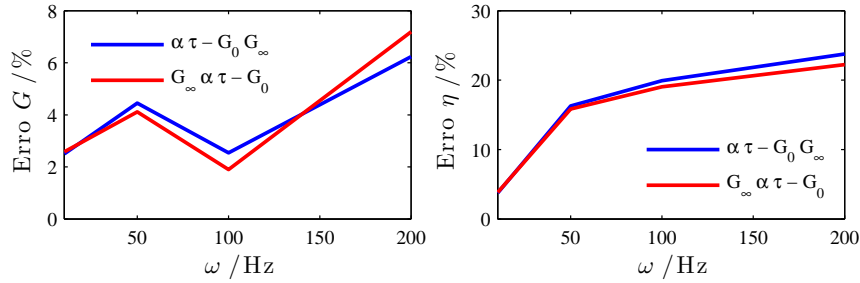


Figura 4.20: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para P300 em função da frequência - $T \approx 24^\circ\text{C}$

A partir da figura 4.17 é possível constatar que com o aumento da frequência os resultados fornecidos pelo nomograma tornam-se mais próximos dos obtidos para o módulo de ganho do provete P300, com erros bastante inferiores relativamente aos dos restantes provetes (tabela 4.10), seguindo-se o provete P180 e P220. Contudo, nas baixas frequências, em particular a 10Hz e 50Hz, são obtidos erros inferiores na determinação do módulo de ganho para os provetes P220 e P180, respectivamente.

O factor de perda apresenta resultados sempre mais próximos do provete P300 para toda a banda de frequências analisada, seguindo-se os provetes P180 e P220.

4.6 Estimativa dos parâmetros do modelo constitutivo

A utilização dos diferentes algoritmos de identificação revelou, por vezes, uma grande influência da estimativa inicial dos parâmetros do modelo constitutivo no resultado final dos parâmetros identificados.

Para os algoritmos bietápicos $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ e $G_\infty \alpha \tau - G_0$, procedeu-se a uma análise da influência dos valores da estimativa inicial dos parâmetros no resultado final dos parâmetros identificados. Para isso, analisaram-se várias situações com diferentes estimativas iniciais dos parâmetros do modelo constitutivo. Na tabela 4.11 apresentam-se os resultados obtidos para o provete P220.

Tabela 4.11: Parâmetros do modelo com alteração da estimativa dos parâmetros com os algoritmos de identificação G_0 G_∞ α τ / α τ - G_0 G_∞ / G_∞ α τ - G_0 - provete P220

Algoritmo	<i>Parâmetro</i>		G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
$G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$	$G_{0/\text{inicial}}$	9×10^4	-2.535×10^5	2.987×10^7	0.518	8.240×10^{-6}
		8×10^4	5.258×10^4	4.942×10^7	0.669	1.220×10^{-5}
		7×10^4	6.070×10^3	4.460×10^7	0.643	1.170×10^{-5}
	$G_{\infty/\text{inicial}}$	9×10^7	7.343×10^4	5.872×10^7	0.681	1.040×10^{-5}
		8×10^7	-2.694×10^5	6.709×10^7	0.502	1.360×10^{-6}
		7×10^7	7.504×10^4	4.236×10^7	0.686	1.740×10^{-5}
	α_{inicial}	6×10^{-1}	-7.808×10^3	3.569×10^7	0.637	1.600×10^{-5}
		7×10^{-1}	-2.795×10^5	2.202×10^7	0.514	1.490×10^{-5}
		8×10^{-1}	1.330×10^5	8.829×10^7	0.718	7.650×10^{-6}
	τ_{inicial}	8×10^{-6}	6.580×10^4	7.560×10^7	0.673	6.595×10^{-6}
		6×10^{-6}	4.138×10^4	4.702×10^7	0.663	1.263×10^{-5}
		5×10^{-6}	5.315×10^4	7.981×10^7	0.666	5.730×10^{-6}
$\alpha \ \tau \ - \ G_0 \ G_\infty$	$G_{0/\text{inicial}}$	9×10^4	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
		8×10^4	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
		7×10^4	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
	$G_{\infty/\text{inicial}}$	9×10^7	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
		8×10^7	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
		7×10^7	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
	α_{inicial}	6×10^{-1}	9.994×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
		7×10^{-1}	9.990×10^4	9.999×10^7	0.695	5.300×10^{-6}
		8×10^{-1}	9.995×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
	τ_{inicial}	8×10^{-6}	1.000×10^5	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
		6×10^{-6}	9.999×10^4	1.000×10^8	0.695	5.297×10^{-6}
		5×10^{-6}	9.988×10^4	9.999×10^7	0.695	5.299×10^{-6}
$G_\infty \ \alpha \ \tau \ - \ G_0$	$G_{0/\text{inicial}}$	9×10^4	1.000×10^5	6.807×10^7	0.697	9.440×10^{-6}
		8×10^4	1.000×10^5	6.807×10^7	0.697	9.440×10^{-6}
		7×10^4	1.000×10^5	6.807×10^7	0.697	9.440×10^{-6}
	$G_{\infty/\text{inicial}}$	9×10^7	1.000×10^5	7.506×10^7	0.697	8.150×10^{-6}
		8×10^7	9.995×10^4	6.245×10^7	0.698	1.080×10^{-5}
		7×10^7	1.000×10^5	5.739×10^7	0.699	1.220×10^{-5}
	α_{inicial}	6×10^{-1}	1.000×10^5	7.493×10^7	0.697	8.170×10^{-6}
		7×10^{-1}	1.000×10^5	1.024×10^8	0.695	5.120×10^{-6}
		8×10^{-1}	9.999×10^4	6.814×10^7	0.697	9.430×10^{-6}
	τ_{inicial}	8×10^{-6}	9.988×10^4	6.535×10^7	0.698	1.000×10^{-5}
		6×10^{-6}	1.000×10^5	9.189×10^7	0.695	6.020×10^{-6}
		5×10^{-6}	1.000×10^5	9.174×10^7	0.695	6.030×10^{-6}

Nas figuras 4.21 e 4.22 apresenta-se a taxa de variação dos parâmetros G_∞ e τ com a alteração da estimativa de α e τ , respectivamente, para o algoritmo G_∞ α τ - G_0 .

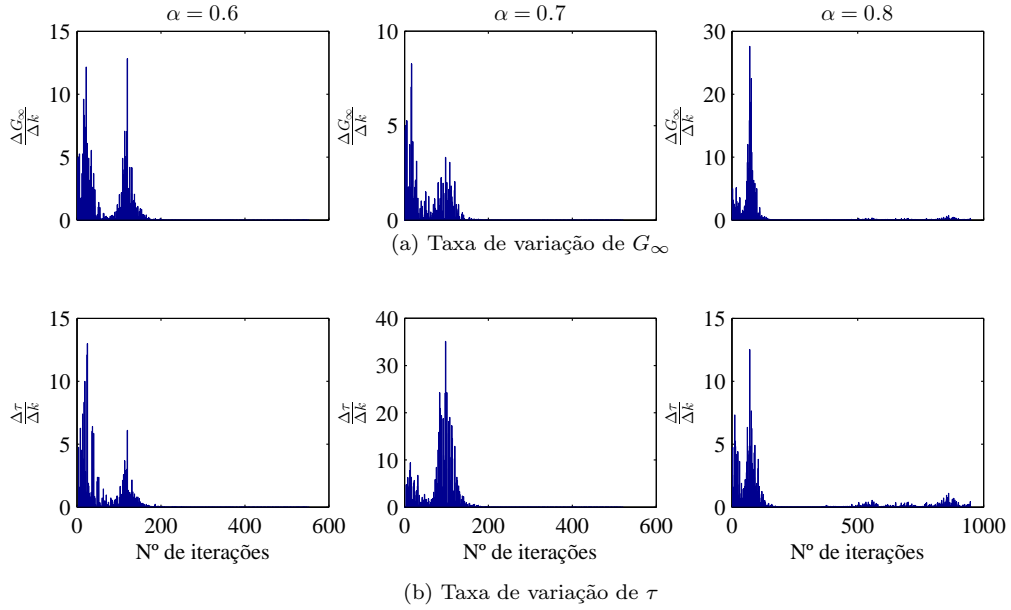


Figura 4.21: Taxa de variação dos parâmetros G_∞ e τ durante o processo iterativo para diferentes valores do parâmetro α - algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - provete P220

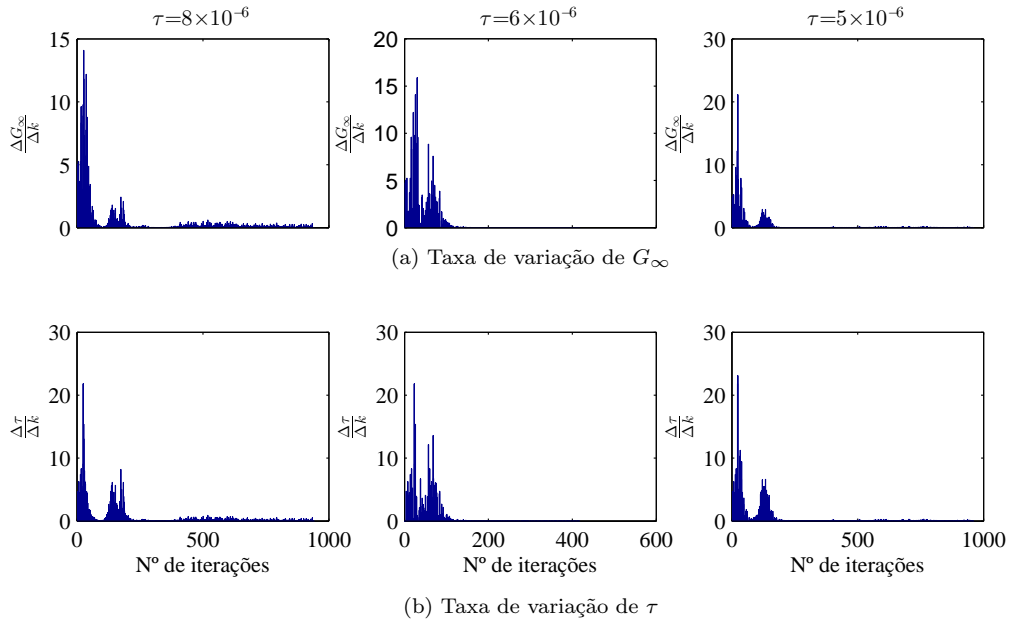


Figura 4.22: Taxa de variação dos parâmetros G_∞ e τ durante o processo iterativo para diferentes valores do parâmetro τ - algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - provete P220

Para o algoritmo $\alpha \tau - G_0 \rightarrow G_\infty$ os resultados obtidos são bastante satisfatórios não havendo nenhuma alteração significativa dos parâmetros identificados em que, para o caso de G_0 e G_∞ , não há qualquer variação. Apenas a alteração das estimativas de α e τ aparenta influenciar

ligeiramente os resultados.

No algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$, os parâmetros identificados já apresentam alguma variação com a alteração das estimativas. Verifica-se que apenas os parâmetros G_∞ e τ apresentam variações significativas, como se pode ver pelas figuras 4.21 e 4.22, mantendo-se G_0 e α praticamente idênticos nos diferentes casos considerados.

Comparando os resultados destes algoritmos com os obtidos com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$ (tabela 4.11), é possível constatar que de facto os dois algoritmos desenvolvidos apresentam grande insensibilidade à estimativa dos parâmetros do modelo constitutivo, tornando o processo de identificação bastante robusto e eficiente na identificação dos parâmetros, com resultados fisicamente consistentes ao longo de toda a banda de medição.

No Apêndice C apresentam-se, ainda, os parâmetros do modelo constitutivo identificados a partir de uma alteração simultânea da estimativa dos quatro parâmetros do modelo.

4.7 Conclusões

- A diferença entre os resultados do P300 dos restantes provetes deve-se, possivelmente, à selecção de menos frequências de controlo na vizinhança da primeira ressonância. Para este provete, são 12 as frequências seleccionadas ao passo que, para P180 e P220, são 23 e 25, respectivamente, como se pode ver pela tabela 4.2. O menor número de frequências de controlo permite um melhor ajustamento das funções transmissibilidade experimental e numérica, conduzindo a valores mais adequados para os parâmetros;
- Com o algoritmo de identificação $G_0 G_\infty \alpha \tau$, o número de frequências de controlo seleccionadas é um factor determinante na identificação dos parâmetros, conduzindo a resultados inválidos para bandas de maior largura;
- Os resultados obtidos na identificação dos parâmetros podem ser influenciados por possíveis perturbações da função transmissibilidade experimental por ruído experimental;
- Analisando o processo iterativo, foi possível verificar que este é executado através da função *fminsearch* de modo idêntico para qualquer banda de frequências. A discrepância entre os resultados obtidos pode ser explicada pela convergência simultânea dos parâmetros dentro da gama de valores esperados nos casos em que são obtidos resultados razoáveis (figura 4.2) ao passo que, nas bandas de frequências cujos resultados são inválidos (figura 4.3), verifica-se uma evolução do parâmetro G_0 bastante distinta, em que apenas é possível a sua convergência quando este atinge valores negativos, causando a divergência dos restantes parâmetros verificada no final do processo;
- Os resultados tão próximos do esperado para o caso do algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ devem-se, possivelmente, à optimização apenas de G_0 numa segunda etapa, evitando assim o problema da convergência deste parâmetro que ocorre em certas bandas com o algoritmo $G_0 G_\infty \alpha \tau$, e não causando a divergência dos restantes parâmetros;
- A optimização bietápica permite uma maior flexibilidade quanto à selecção das frequências de controlo uma vez que para qualquer banda considerada são sempre obtidos resultados satisfatórios, não sendo necessário uma escolha específica, como no caso do algoritmo definido por uma única etapa;

- Com base nos resultados obtidos a partir do nomograma do material, foi possível constatar que o factor de perda $\eta(\omega)$, apresenta resultados mais próximos do provete P300 para toda a banda de frequências analisada. O módulo de ganho $G(\omega)$, apresenta ligeiras diferenças nas frequências mais baixas, aproximando-se, contudo, do provete P300 com o aumento da frequência;
- O algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ revelou ser o que apresenta menor sensibilidade à alteração das estimativas dos parâmetros. Com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ apenas G_∞ e τ apresentam variações mais significativas.

Capítulo 5

Análise de sensibilidades

5.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentada uma análise de sensibilidades para o algoritmo de identificação simultânea dos parâmetros do modelo constitutivo e para os dois algoritmos bietápicos considerados no capítulo anterior. Pretende-se com esta análise avaliar a sensibilidade do módulo de ganho e do factor de perda do material viscoelástico caracterizado, e ainda a sensibilidade dos parâmetros do modelo constitutivo durante o processo de optimização.

5.2 Modelo constitutivo e sensibilidades

O modelo constitutivo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros, já apresentado no capítulo 2, tem como expressão,

$$G(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (5.1)$$

As sensibilidades do módulo de ganho e do factor de perda relativamente a cada um dos parâmetros do modelo constitutivo de fraccionárias (5.1) são estabelecidas com base na determinação das expressões das derivadas parciais de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ relativamente a G_0 , G_∞ , α e τ [8–11].

5.2.1 Sensibilidades de $G(\omega)$

As expressões para as derivadas parciais de $G(\omega)$ em relação aos parâmetros G_0 , G_∞ , α e τ são dadas pelas equações (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5), respectivamente.

- Derivada de $G(\omega)$ em relação a G_0

$$\frac{\partial G}{\partial G_0} = \frac{1}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (5.2)$$

- Derivada de $G(\omega)$ em relação a G_∞

$$\frac{\partial G}{\partial G_\infty} = \frac{(j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \quad (5.3)$$

- Derivada de $G(\omega)$ em relação a α

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{G_\infty (j\omega\tau)^\alpha \ln(j\omega\tau)}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} - \frac{(G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha) (j\omega\tau)^\alpha \ln(j\omega\tau)}{(1 + (j\omega\tau)^\alpha)^2} \quad (5.4)$$

- Derivada de $G(\omega)$ em relação a τ

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{G_\infty (j\omega\tau)^\alpha \alpha}{\tau(1 + (j\omega\tau)^\alpha)} - \frac{(G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha) (j\omega\tau)^\alpha \alpha}{(1 + (j\omega\tau)^\alpha)^2 \tau} \quad (5.5)$$

5.2.2 Sensibilidades de $\eta(\omega)$

O factor de perda do material, conforme definido no capítulo 2, é dado pela expressão,

$$\eta(\omega) = \frac{\Im \left(\frac{G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \right)}{\Re \left(\frac{G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha}{1 + (j\omega\tau)^\alpha} \right)} \quad (5.6)$$

As expressões para as derivadas parciais de $\eta(\omega)$ em relação aos parâmetros G_0 , G_∞ , α e τ são dadas pelas equações (5.7), (5.8), (5.10) e (5.14), respectivamente.

- Derivada de $\eta(\omega)$ em relação a G_0

$$\frac{\partial \eta}{\partial G_0} = -\frac{j}{\Re \left(\frac{G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha}{\sigma_1} \right) \sigma_1} + \frac{\Re \left(\frac{1}{\sigma_1} \right) (G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha) j}{\Re \left(\frac{G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha}{\sigma_1} \right)^2 \sigma_1} \quad (5.7)$$

- Derivada de $\eta(\omega)$ em relação a G_∞

$$\frac{\partial \eta}{\partial G_\infty} = -\frac{(j\omega\tau)^\alpha j}{\Re \left(\frac{G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha}{\sigma_1} \right) \sigma_1} + \frac{\Re \left(\frac{(j\omega\tau)^\alpha}{\sigma_1} \right) (G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha) j}{\Re \left(\frac{G_0 + G_\infty (j\omega\tau)^\alpha}{\sigma_1} \right)^2 \sigma_1} \quad (5.8)$$

onde,

$$\sigma_1 = (j\omega\tau)^\alpha + 1 \quad (5.9)$$

- Derivada de $\eta(\omega)$ em relação a α

$$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = -\frac{(G_0 + G_\infty \sigma_2) \left(\Re \left(\frac{\sigma_3 (G_0 + G_\infty \sigma_2) \sigma_2}{(\sigma_2 + 1)^2} \right) - \Re \left(\frac{G_\infty \sigma_3 \sigma_2}{\sigma_2 + 1} \right) \right) j}{\sigma_1^2 (\sigma_2 + 1)} - \frac{G_\infty \sigma_3 \sigma_2 j}{\sigma_1 (\sigma_2 + 1)} + \frac{\sigma_3 (G_0 + G_\infty \sigma_2) \sigma_2 j}{\sigma_1 (\sigma_2 + 1)^2} \quad (5.10)$$

onde,

$$\sigma_1 = \Re \left(\frac{G_0 + G_\infty \sigma_2}{\sigma_2 + 1} \right) \quad (5.11)$$

$$\sigma_2 = (j\omega\tau)^\alpha \quad (5.12)$$

$$\sigma_3 = \ln(j\omega\tau) \quad (5.13)$$

- Derivada de $\eta(\omega)$ em relação a τ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = & -\frac{(G_0 + G_\infty \sigma_2) \left(\Im \left(\frac{\omega G_\infty \alpha \sigma_3}{\sigma_2 + 1} \right) - \Re \left(-\frac{\omega \alpha (G_0 + G_\infty \sigma_2) \sigma_3 j}{(\sigma_2 + 1)^2} \right) \right) j}{\sigma_1^2 (\sigma_2 + 1)} - \frac{\omega \alpha (G_0 + G_\infty \sigma_2) \sigma_3}{\sigma_1 (\sigma_2 + 1)^2} \\ & + \frac{\omega G_\infty \alpha \sigma_3}{\sigma_1 (\sigma_2 + 1)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde,

$$\sigma_1 = \Re \left(\frac{G_0 + G_\infty \sigma_2}{\sigma_2 + 1} \right) \quad (5.15)$$

$$\sigma_2 = (j\omega\tau)^\alpha \quad (5.16)$$

$$\sigma_3 = (j\omega\tau)^{\alpha-1} \quad (5.17)$$

5.2.3 Determinação das sensibilidades

Na fase de optimização do processo de identificação inversa, as derivadas parciais representativas das sensibilidades são calculadas em cada iteração e para cada uma das frequências de controlo. Por uma questão de implementação, os valores de cada uma das derivadas parciais (num total de oito) são armazenados numa matriz de dimensões $l \times n$ em que l corresponde ao número de iterações e n ao número de frequências de controlo da banda em análise.

Na figura 5.1 é ilustrado o processo de identificação implementado no software *Matlab*[®] e as respectivas etapas definidas para a determinação das sensibilidades.

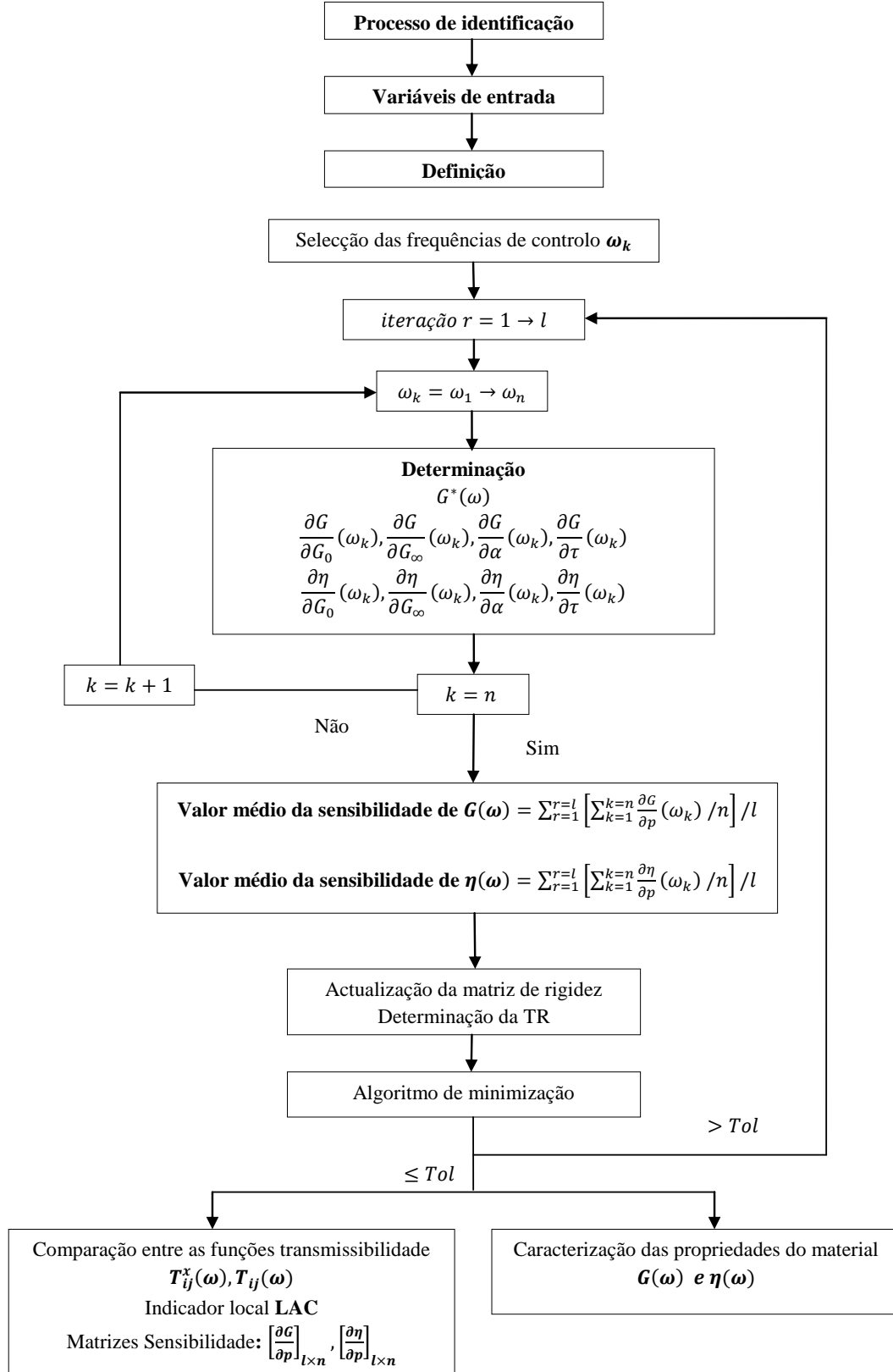


Figura 5.1: Fluxograma do processo de identificação - sensibilidades

5.2.4 Análise dos resultados

De seguida, foram determinados os valores médios das sensibilidades das propriedades para o material viscoelástico em estudo, para os diferentes algoritmos de identificação considerados.

Algoritmo $G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$

O valor médio das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para cada provete na banda de frequências situada entre o máximo e mínimo da parte real da função transmissibilidade é dado pela tabela 5.1.

Tabela 5.1: Valores médios das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$

Provete		$\frac{\partial(\bullet)}{\partial G_0}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial G_\infty}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \tau}$
P180	$G(\omega)$	0.992	0.017	7.020×10^6	8.330×10^{10}
	$\eta(\omega)$	2.623×10^{-6}	3.754×10^{-9}	4.010	14394
P220	$G(\omega)$	0.994	0.013	6.106×10^6	7.049×10^{10}
	$\eta(\omega)$	3.039×10^{-6}	3.856×10^{-9}	3.449	18148
P300	$G(\omega)$	0.995	0.010	3.541×10^6	3.540×10^{10}
	$\eta(\omega)$	3.331×10^{-6}	8.434×10^{-9}	0.453	27704

Os resultados obtidos revelam uma grande discrepância entre as sensibilidades determinadas, apresentando τ , com uma ordem de grandeza muito superior, maior influência sobre $G(\omega)$ durante o processo de identificação, seguindo-se α , ainda com elevada ordem de grandeza, G_0 e por fim, G_∞ , ambos com valores muito inferiores.

As sensibilidades de $\eta(\omega)$ mostram que esta propriedade é, também, mais sensível ao parâmetro τ , seguindo-se α , G_0 e G_∞ . Contudo, os valores determinados apresentam ordens de grandeza bastante distintas dos obtidos para $G(\omega)$.

Algoritmo $\alpha \ \tau - G_0 \ G_\infty$

Com o algoritmo $\alpha \ \tau - G_0 \ G_\infty$, o valor médio das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para os diferentes provetes é apresentado na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Valores médios das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $\alpha \ \tau - G_0 \ G_\infty$

Provete		$\frac{\partial(\bullet)}{\partial G_0}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial G_\infty}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \tau}$
P180	$G(\omega)$	0.995	0.011	4.476×10^6	8.011×10^{10}
	$\eta(\omega)$	2.599×10^{-6}	2.600×10^{-9}	1.811	1.758×10^4
P220	$G(\omega)$	0.996	0.009	2.866×10^6	4.456×10^{10}
	$\eta(\omega)$	3.018×10^{-6}	3.018×10^{-9}	1.087	1.329×10^4
P300	$G(\omega)$	0.998	0.004	3.285×10^6	9.942×10^{10}
	$\eta(\omega)$	3.071×10^{-6}	3.072×10^{-9}	0.432	6.816×10^4

Os resultados da tabela 5.2 estão de acordo com os obtidos com o algoritmo $G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$, evidenciando $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ maior sensibilidade ao parâmetro τ seguido de α , G_0 e G_∞ .

Algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

Para o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$, o valor médio das sensibilidades de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ obtido durante o processo de optimização é apresentado na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Valores médios das sensibilidade $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

Provete		$\frac{\partial(\bullet)}{\partial G_0}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial G_\infty}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \tau}$
P180	$G(\omega)$	0.993	0.164	7.323×10^7	1.008×10^{12}
	$\eta(\omega)$	2.600×10^{-6}	1.069×10^{-5}	40.093	2.043×10^5
P220	$G(\omega)$	0.994	0.135	6.345×10^7	7.583×10^{11}
	$\eta(\omega)$	3.020×10^{-6}	7.091×10^{-6}	34.002	2.287×10^5
P300	$G(\omega)$	0.996	0.051	2.498×10^7	4.288×10^{11}
	$\eta(\omega)$	3.072×10^{-6}	2.032×10^{-6}	4.772	2.869×10^5

Para este algoritmo, foram também obtidos resultados muito semelhantes aos dos algoritmos anteriormente referidos.

Os resultados apresentados nas tabelas 5.1, 5.2, 5.3 são apenas valores médios das sensibilidades e traduzem apenas um valor médio das derivadas parciais das propriedades, pois como estas dependem do valor de cada parâmetro, que é actualizado ao longo do processo iterativo, e da frequência, devem ser avaliadas individualmente. Contudo, uma vez que a diferença na ordem de grandeza das sensibilidades é tão significativa, torna-se numa aproximação razoável.

Refira-se que os valores obtidos para as sensibilidades diferem ligeiramente nos três algoritmos de identificação, uma vez que os parâmetros do modelo para uma dada iteração genérica, r , e para uma dada frequência, são também diferentes em cada um dos algoritmos.

A partir da análise de sensibilidades desenvolvida é possível estabelecer que, apesar das ligeiras diferenças nas sensibilidades determinadas para cada algoritmo, a ordem de influência, definida pelo valor da sensibilidade, dos parâmetros no módulo complexo é idêntica, e é apresentada na tabela 5.4.

Tabela 5.4: Ordem de influência dos parâmetros no módulo complexo

$G(\omega)$	$\eta(\omega)$
$\tau, \alpha, G_0, G_\infty$	$\tau, \alpha, G_0, G_\infty$

5.3 Variação do módulo de ganho e do factor de perda

Procedeu-se ainda a uma análise de como o módulo de ganho, $G(\omega)$, e o factor de perda, $\eta(\omega)$, variam com cada parâmetro no processo de identificação, para uma dada frequência da banda seleccionada. Para tal, foi determinada a taxa de variação das propriedades, $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$, para cada parâmetro e em cada iteração r do processo de optimização para uma determinada frequência. Em cada iteração, o valor considerado para cada parâmetro é o correspondente valor óptimo na iteração corrente r . No caso particular dos algoritmos bietápicos, na primeira etapa consideram-se para os parâmetros fixos nessa etapa as estimativas iniciais e para os parâmetros a optimizar os valores óptimos em cada iteração. Na segunda etapa, os valores dos parâmetros fixos são os valores óptimos resultantes da primeira etapa e para os parâmetros a optimizar são os valores óptimos da iteração corrente r .

Na sequência da análise anterior, procedeu-se igualmente à determinação da taxa de variação dos parâmetros do modelo constitutivo em cada iteração durante o processo de identificação. Para os algoritmos bietápicos, a taxa de variação em cada etapa corresponde apenas aqueles parâmetros que são otimizados nessa etapa.

Estas duas análises permitem caracterizar a evolução do módulo complexo e dos parâmetros do modelo constitutivo ao longo do processo de identificação para os diferentes algoritmos de identificação estabelecidos.

As análises foram desenvolvidas para o provete P220 e para a primeira frequência da banda considerada.

Algoritmo $G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$

A taxa de variação de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$, para o algoritmo $G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$, é ilustrada nas figuras 5.2 e 5.3, respectivamente. A representação da taxa de variação dos parâmetros do modelo, para a banda considerada, é apresentada na figura 4.2 do capítulo 4.

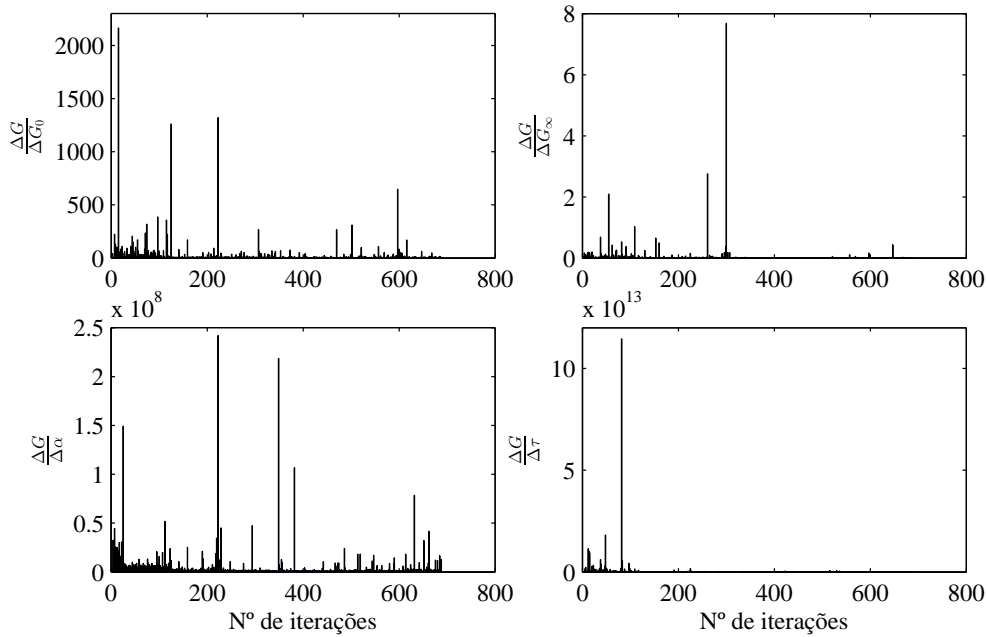


Figura 5.2: Taxa de variação de $G(\omega)$ com o algoritmo $G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$

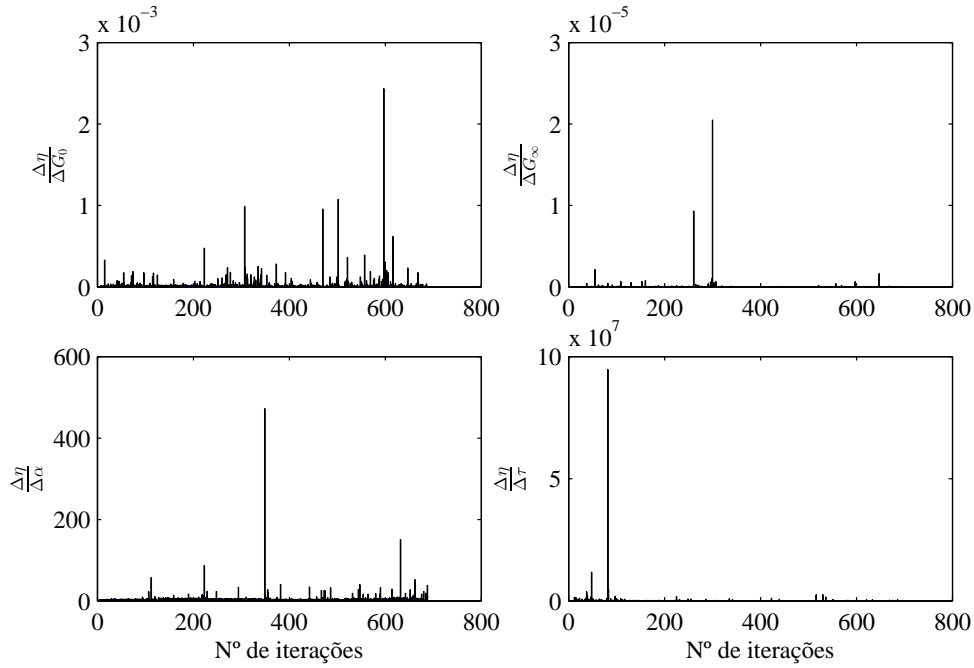


Figura 5.3: Taxa de variação de $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_0 \ G_\infty \ \alpha \ \tau$

Os resultados obtidos e apresentados nas figuras 5.2 - 5.3 para a banda de frequências considerada, revelam que as propriedades $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ apresentam maior sensibilidade ao parâmetro τ , uma vez que o valor máximo das taxas de variação das propriedades é obtida com este parâmetro, seguindo-se α , G_0 e G_∞ . Apesar de ser com este parâmetro que se obtém a taxa de variação de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ mais elevada, isto apenas se verifica no início do processo iterativo em que, após a fase inicial do processo, são os parâmetros α e G_0 que mais influenciam as propriedades no decorrer do processo de identificação.

A partir da figura 4.2, verifica-se que é possível uma convergência simultânea dos quatro parâmetros o que, como referido anteriormente, revela que o processo de optimização conduzirá a bons resultados na identificação dos parâmetros do modelo constitutivo, pois é evitado o problema da convergência do parâmetro G_0 que se verifica em certas bandas de frequências.

Algoritmo $\alpha \ \tau - G_0 \ G_\infty$

Para o algoritmo $\alpha \ \tau - G_0 \ G_\infty$, a taxa de variação de $G(\omega)$, de $\eta(\omega)$ e dos parâmetros do modelo é representada nas figuras 5.4, 5.5 e 5.6, respectivamente.

Refira-se que, para este algoritmo, as taxas de variação de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com α e τ são determinadas na primeira etapa e as taxas de variação com G_0 e G_∞ na segunda etapa. De forma idêntica, as taxas de variação de α e τ ao longo do processo de optimização são determinadas na primeira etapa e as taxas de variação de G_0 e G_∞ na segunda etapa.

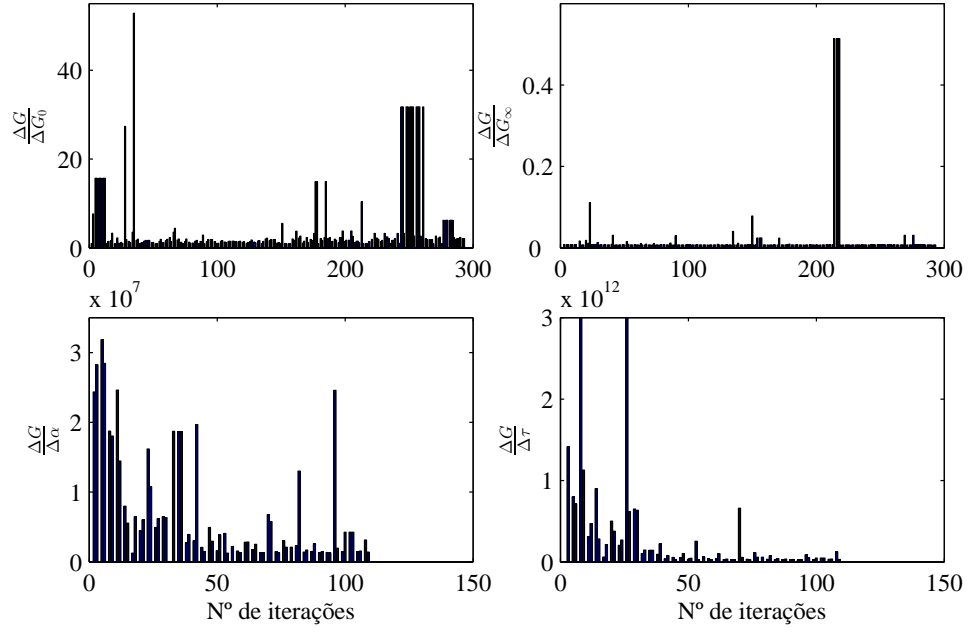


Figura 5.4: Taxa de variação de $G(\omega)$ com o algoritmo α τ - G_0 G_∞

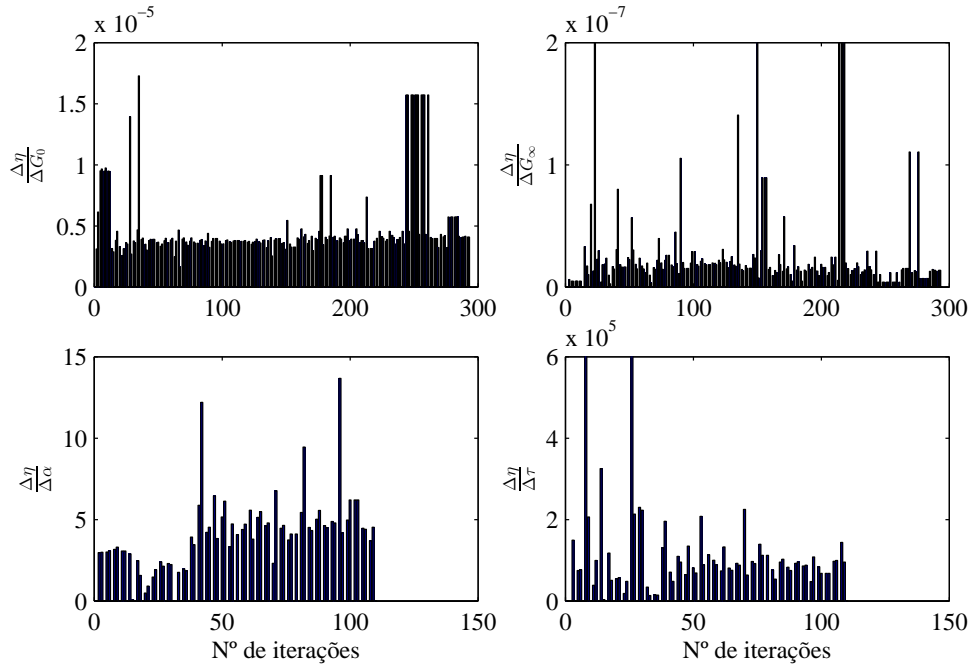


Figura 5.5: Taxa de variação de $\eta(\omega)$ com o algoritmo α τ - G_0 G_∞

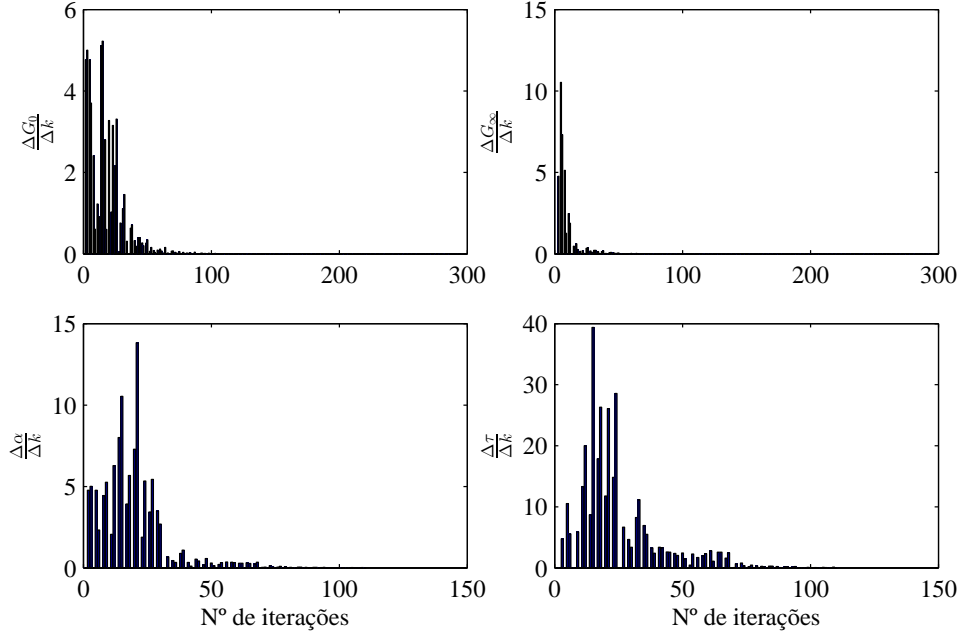


Figura 5.6: Taxa de variação dos parâmetros com o algoritmo $\alpha - \tau - G_0 - G_\infty$

Para este algoritmo, a representação da taxa de variação do módulo de ganho e do factor de perda com os parâmetros do modelo constitutivo evidencia ser o parâmetro τ o de maior influência na primeira etapa e o parâmetro G_0 na segunda etapa.

Relativamente ao algoritmo anterior, verifica-se que são obtidas menores taxas de variação das propriedades em relação a G_0 e G_∞ , uma vez que a optimização destes parâmetros é iniciada com os valores já optimizados de α e τ na primeira etapa e, portanto, com valores mais adequados para estes parâmetros. Assim, na segunda etapa de optimização, os valores poderão ser facilmente ajustados não causando, portanto, grandes variações nas propriedades.

Com este algoritmo, é ainda possível verificar uma redução do valor máximo obtido para as taxas de variação das propriedades, $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$, com cada um dos parâmetros do modelo constitutivo, relativamente ao algoritmo $G_0 - G_\infty - \alpha - \tau$.

Comparando a figura 5.6, na qual são representadas as taxas de variação dos parâmetros do modelo constitutivo durante o processo de identificação com o algoritmo $\alpha - \tau - G_0 - G_\infty$, com a figura 4.2 relativa às taxas de variação com o algoritmo $G_0 - G_\infty - \alpha - \tau$, é possível constatar que, com este algoritmo, os parâmetros convergem mais rapidamente para os seus valores óptimos obtidos no final do processo de identificação. E que consegue-se uma redução do valor máximo das taxas de variação G_0 e G_∞ também pelo facto da sua optimização ser iniciada com valores mais adequados dos parâmetros α e τ , facilitando o processo de optimização, permitindo a estabilização mais rápida dos seus valores para os valores finais optimizados.

Algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

Para o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$, a taxa variação de $G(\omega)$, de $\eta(\omega)$ e dos parâmetros do modelo é apresentada nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9, respectivamente.

Como referido para o algoritmo anterior, para o presente algoritmo de identificação, a taxa de variação das propriedades com cada parâmetro apresentada é também determinada na etapa do algoritmo na qual o respectivo parâmetro está a ser otimizado.

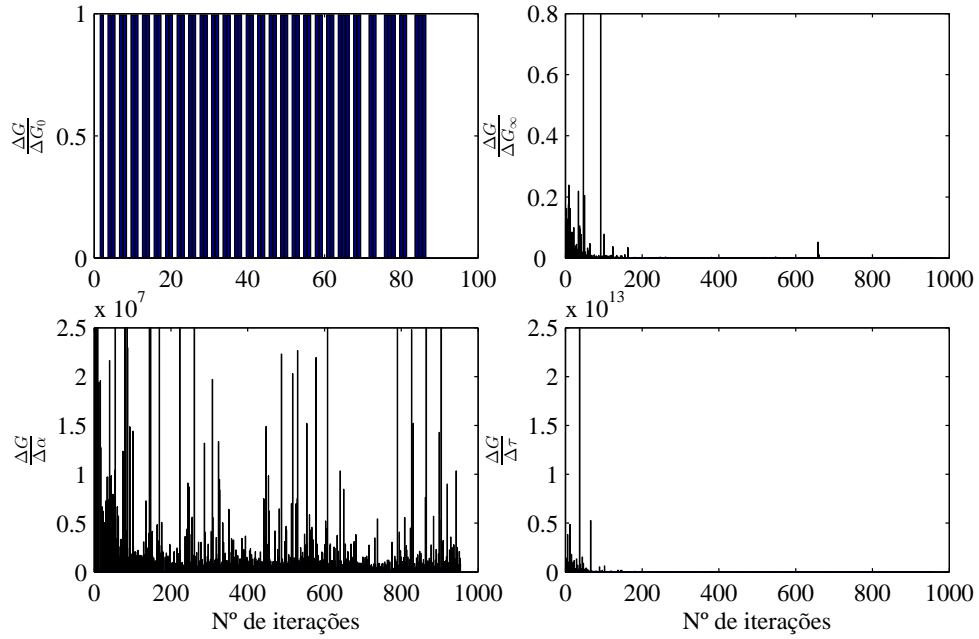


Figura 5.7: Taxa de variação de $G(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

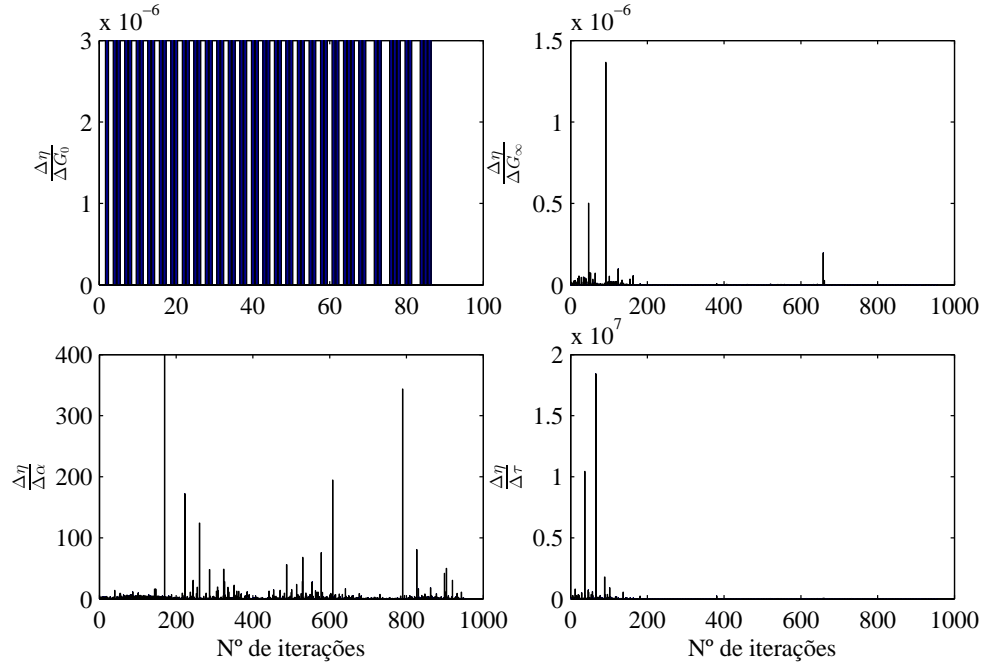


Figura 5.8: Taxa de variação de $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

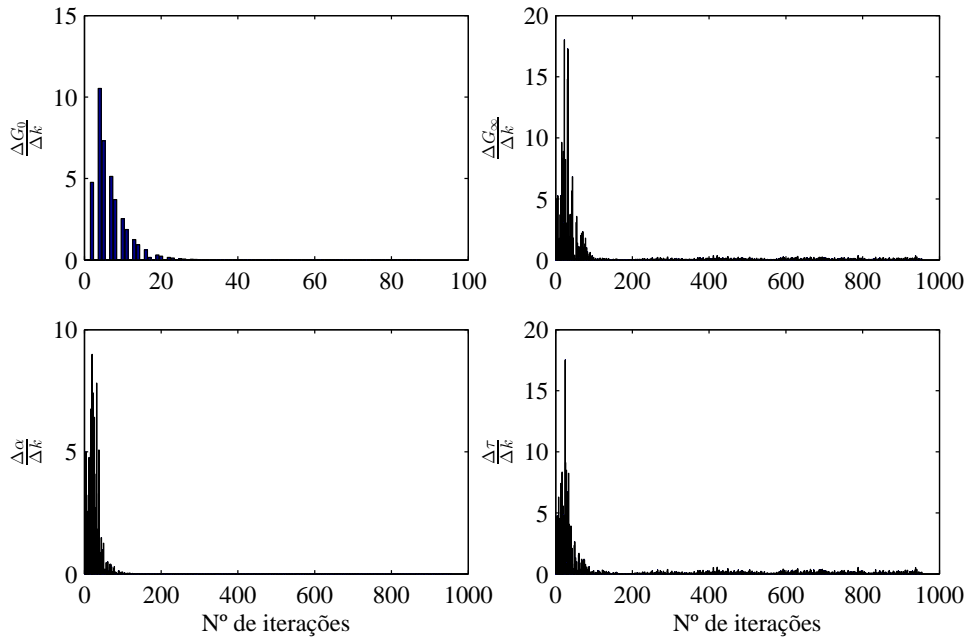


Figura 5.9: Taxa de variação dos parâmetros com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

Para este algoritmo, os resultados são também consistentes com a ordem de influência

estabelecida para os parâmetros do modelo constitutivo sobre as propriedades do material viscoelástico (τ , α , G_0 , G_∞).

Apesar da taxa de variação para um dada iteração k ser, na maioria das iterações, mais elevada com o parâmetro τ , isto apenas se verifica no início do processo de identificação, em que após um determinado número de iterações atingido, $G(\omega)$ apresenta maior variação com o parâmetro α , na primeira etapa do processo de identificação. A mesma conclusão pode ser retirada para $\eta(\omega)$ apresentando, contudo, variações menos significativas.

Refira-se que, com este algoritmo, a representação das taxas de variação $\frac{\Delta G}{\Delta G_0}$ e $\frac{\Delta \eta}{\Delta G_0}$ é idêntica ao longo do processo de identificação, pois como são determinadas na segunda etapa do processo, na qual é otimizado apenas o parâmetro G_0 , qualquer variação destas propriedades deve-se unicamente à variação do parâmetro G_0 . E que, o valor das taxas de variação $\frac{\Delta G}{\Delta G_0}$ e $\frac{\Delta \eta}{\Delta G_0}$, calculadas para cada iteração r , convergem para os valores das sensibilidades, $\frac{\partial G}{\partial G_0}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial G_0}$, determinadas durante o processo de identificação para a mesma iteração r .

Analisando a figura 5.9, é possível verificar que é conseguida uma convergência mais rápida dos parâmetros do modelo constitutivo durante o processo de identificação relativamente aos algoritmos anteriormente referidos (figuras 5.6 e 4.2), obtendo-se taxas de variação dos parâmetros inferiores relativamente ao algoritmo α τ - G_0 G_∞ , excepto para o parâmetro G_0 , não sendo, porém, uma diferença significativa.

5.4 Variação dos parâmetros do modelo constitutivo

Face à consistência dos resultados obtidos com as análises de sensibilidade anteriormente desenvolvidas, a seguinte análise é desenvolvida apenas para o algoritmo $G_0, G_\infty, \alpha, \tau$, pois como apresenta piores resultados na identificação dos parâmetros do modelo, torna-se necessário um estudo mais aprofundado da influência dos parâmetros no modelo constitutivo para este algoritmo.

Assim, foi estabelecido um processo em que, para cada uma das propriedades $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$, e considerando quatro casos distintos obtidos a partir das sensibilidade para o provete P220, foi determinada a variação dos parâmetros do modelo constitutivo que permite aproximar as taxas de variação das propriedades, $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$, dos resultados obtidos para as correspondentes sensibilidade.

A taxa de variação das propriedades $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ foi calculada para uma determinada frequência da seguinte forma,

$$\frac{\Delta(G, \eta)}{\Delta(G_0, G_\infty, \alpha, \tau)} = \frac{(G, \eta)^{k+1} - (G, \eta)^k}{(G_0, G_\infty, \alpha, \tau)^{k+1} - (G_0, G_\infty, \alpha, \tau)^k} \quad (5.18)$$

em que k corresponde a uma iteração genérica e cada parâmetro varia à vez.

Partindo dos resultados das derivadas parciais de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ em relação a cada um dos parâmetros, definidas pelas sensibilidade calculadas no processo de identificação, a variação de cada um dos parâmetros, $\Delta(G_0, G_\infty, \alpha, \tau)$, mantendo os outros constantes, foi ajustada de forma a serem obtidos valores para as taxas de variação das propriedades o mais próximo possível das respectivas derivadas. A frequência de controlo é de valor idêntico ao utilizado no cálculo das sensibilidade.

Esta análise foi também desenvolvida para o provete P220 e para a primeira frequência da banda considerada em cada caso.

As sensibilidade, taxas de variação das propriedades e os valores finais obtidos para a variação de cada parâmetro são apresentados nas tabelas 5.5 e 5.6 para $G(\omega)$, e nas tabelas 5.7 e 5.8 para $\eta(\omega)$.

Resultados para $G(\omega)$

Tabela 5.5: Sensibilidade e taxas de variação de $G(\omega)$

Caso		G_0	G_∞	α	τ
1	$\frac{\partial G}{\partial(\bullet)}$	0.994	0.013	5.247×10^6	5.335×10^{10}
	$\frac{\Delta G}{\Delta(\bullet)}$	0.994	0.0125	5.357×10^6	5.403×10^{10}
2	$\frac{\partial G}{\partial(\bullet)}$	0.994	0.012	5.506×10^6	6.591×10^{10}
	$\frac{\Delta G}{\Delta(\bullet)}$	0.994	0.012	5.387×10^6	6.458×10^{10}
3	$\frac{\partial G}{\partial(\bullet)}$	0.994	0.013	5.409×10^6	5.652×10^{10}
	$\frac{\Delta G}{\Delta(\bullet)}$	0.994	0.014	5.313×10^6	5.718×10^{10}
4	$\frac{\partial G}{\partial(\bullet)}$	0.994	0.012	6.144×10^6	1.184×10^{11}
	$\frac{\Delta G}{\Delta(\bullet)}$	0.994	0.012	6.153×10^6	1.184×10^{11}

Tabela 5.6: Variação dos parâmetros do modelo para $G(\omega)$

Caso	ΔG_0	ΔG_∞	$\Delta \alpha$	$\Delta \tau$
1	*	*	6.800×10^{-3}	8.880×10^{-7}
2	*	*	7.000×10^{-3}	1.180×10^{-6}
3	*	*	5.900×10^{-3}	3.930×10^{-8}
4	*	*	4.600×10^{-4}	1.700×10^{-9}

Para que melhor se compreenda a análise desenvolvida, tome-se como exemplo os resultados obtidos relativamente ao parâmetro α no primeiro caso considerado. Se no processo de identificação, e para duas iterações genéricas k e $k + 1$, fossem obtidos valores idênticos para os parâmetros G_0 , G_∞ e τ (e de valor idêntico ao utilizado na presente análise), e o $\Delta \alpha$ obtido da iteração k para a iteração $k + 1$ fosse 6.8×10^{-3} , o valor obtido para a sensibilidade, $\frac{\partial G}{\partial \alpha}$, e taxa de variação, $\frac{\Delta G}{\Delta \alpha}$, estariam o mais próximo possível e de valor idêntico ao apresentado na tabela 5.5. Assim, seria possível uma convergência da taxa de variação de $G(\omega)$ com respeito ao parâmetro α para o valor da respectiva derivada parcial (sensibilidade).

No caso de $G(\omega)$, consegue-se reproduzir os resultados apresentados na tabela 5.5 para as sensibilidades a G_0 e G_∞ para qualquer ΔG_0 e ΔG_∞ compreendido entre a respectiva estimativa e o valor óptimo, por isso não foi especificado nenhum ΔG_0 e ΔG_∞ na tabela 5.6.

Estes resultados para ΔG_0 e ΔG_∞ reflectem que, uma vez que é possível uma convergência dos resultados para qualquer variação destes parâmetros, os valores determinados, para cada iteração r , das sensibilidades $\frac{\partial G}{\partial G_0}$ e $\frac{\partial G}{\partial G_\infty}$, devem ser idênticos ao longo do processo de identificação o que, analisando $\left[\frac{\partial G}{\partial G_0} \right]_{r \rightarrow l \times 1}$ e $\left[\frac{\partial G}{\partial G_\infty} \right]_{r \rightarrow l \times 1}$, de facto se verifica.

Tal já não é possível para as sensibilidades a α e τ que requerem um ajustamento muito preciso de $\Delta \alpha$ e $\Delta \tau$, respectivamente, para que se verifique uma convergência dos resultados.

Resultados para $\eta(\omega)$

Tabela 5.7: Sensibilidades e taxas de variação de $\eta(\omega)$

Caso		G_0	G_∞	α	τ
1	$\frac{\partial \eta}{\partial (\bullet)}$	3.323×10^{-6}	4.799×10^{-9}	3.342	18088
	$\frac{\Delta \eta}{\Delta (\bullet)}$	3.323×10^{-6}	4.799×10^{-9}	3.346	1.835×10^4
2	$\frac{\partial \eta}{\partial (\bullet)}$	3.116×10^{-6}	3.966×10^{-9}	3.334	19199
	$\frac{\Delta \eta}{\Delta (\bullet)}$	3.116×10^{-6}	3.966×10^{-9}	3.217	1.910×10^4
3	$\frac{\partial \eta}{\partial (\bullet)}$	3.088×10^{-6}	4.429×10^{-9}	3.400	16076
	$\frac{\Delta \eta}{\Delta (\bullet)}$	3.088×10^{-6}	4.429×10^{-9}	3.395	1.605×10^4
4	$\frac{\partial \eta}{\partial (\bullet)}$	2.387×10^{-6}	3.392×10^{-9}	2.547	31434
	$\frac{\Delta \eta}{\Delta (\bullet)}$	2.387×10^{-6}	3.392×10^{-9}	2.539	3.136×10^4

Tabela 5.8: Variação dos parâmetros do modelo para $\eta(\omega)$

Caso	ΔG_0	ΔG_∞	$\Delta \alpha$	$\Delta \tau$
1	1	1	0.192	1.082×10^{-5}
2	1	1	0.192	8.550×10^{-5}
3	1	1	0.187	10.082×10^{-5}
4	1	1	0.205	4.750×10^{-5}

Comparando as tabelas 5.6 e 5.8, é possível verificar que o módulo de ganho $G(\omega)$ apresenta maior sensibilidade aos parâmetros τ e α quando comparado a $\eta(\omega)$, pois é necessária uma menor variação destes parâmetros para variar $G(\omega)$.

O factor de perda $\eta(\omega)$ apresenta maior sensibilidade a variações dos parâmetros τ e α . Contudo, aparenta ser mais influenciado pelos parâmetros G_0 e G_∞ do que $G(\omega)$, o que pode ser validado analisando a evolução destas propriedades quando são obtidos valores positivos e negativos para o parâmetro G_0 (figura 4.8 do capítulo 4) em que, no segundo caso, a representação de $\eta(\omega)$ é bastante diferente, havendo uma grande perturbação nas bandas de frequências mais baixas, enquanto que para $G(\omega)$ esta influência não é tão notória.

5.5 Conclusões

- Através de uma análise de sensibilidades e da variação do módulo complexo do material viscoelástico com o processo de identificação, sob a forma de módulo de ganho e factor de perda, representado através do modelo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros, é possível constatar que este apresenta maior sensibilidade ao parâmetro τ , seguindo-se α , G_0 e G_∞ ;
- Os valores obtidos para as sensibilidades são específicos para um dado algoritmo de identificação, isto é, diferentes algoritmos apresentam diferentes sensibilidades uma vez que os parâmetros do modelo constitutivo são também diferentes consoante o algoritmo, concluindo-se que a sensibilidade das propriedades com respeito aos parâmetros do modelo é característica do algoritmo de identificação utilizado;
- As taxas de variação determinadas para as propriedades $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com respeito aos parâmetros do modelo constitutivo, permitem confirmar que é τ o parâmetro de maior influência nas propriedades do material viscoelástico, seguindo-se α , G_0 e G_∞ . Com os dois algoritmos de identificação bietápicos estabelecidos, é possível obter uma evolução dos parâmetros do modelo constitutivo ao longo do processo iterativo muito semelhante, conseguindo-se a convergência simultânea dos quatro parâmetros que, como referido no capítulo 4, conduz a resultados bastante satisfatórios na identificação dos parâmetros do modelo constitutivo;
- O algoritmo utilizado no processo de identificação aparenta influenciar mais o valor das taxas de variação das propriedades com respeito aos parâmetros do modelo ao longo do processo iterativo, do que os valores determinados para as sensibilidades, pois no último caso, a diferença dos valores obtidos com cada algoritmo para as sensibilidades não é tão significativa como para as taxas de variação;
- Com base na análise desenvolvida sobre a variação dos parâmetros do modelo constitutivo, foi possível concluir que o módulo de ganho, $G(\omega)$, e o factor de perda, $\eta(\omega)$, são mais

sensíveis a variações dos parâmetros τ e α . Porém, o factor de perda $\eta(\omega)$ aparenta ser mais sensível a variações de G_0 e G_∞ do que o $G(\omega)$;

- Os resultados decorrentes da análise de sensibilidades e da taxa de variação do módulo de ganho e do factor de perda ao longo do processo de identificação, em particular a influência relativa dos parâmetros, justificam e sustentam o bom desempenho dos algoritmos bietápicos analisados e seleccionados no capítulo 4.

Capítulo 6

Identificação multirressonância e multifunção

6.1 Introdução

Neste capítulo, foi desenvolvida uma análise que permitisse validar a consistência dos resultados obtidos com os dois algoritmos propostos, em especial, garantir que o efeito da frequência é devidamente representado na caracterização do módulo complexo. Assim, procedeu-se à determinação das propriedades do material viscoelástico considerando diferentes ressonâncias, aumentando a banda de frequências na qual é analisado o material.

Foi ainda desenvolvido um processo de identificação das propriedades baseado na comparação simultânea de funções transmissibilidade experimentais e numéricas, determinadas em diferentes secções do provete.

6.2 Identificação multirressonância

Para os dois algoritmos de identificação propostos, foram determinados os parâmetros do modelo constitutivo para cada um dos provetes, com base numa identificação multirressonância, considerando a primeira ressonância, segunda ressonância e as duas primeiras ressonâncias. As frequências de controlo são definidas por todas as frequências situadas entre o máximo (ω_A) e mínimo (ω_B) da parte real da função transmissibilidade, na vizinhança da respectiva ressonância em análise.

Algoritmo α τ - G_0 G_∞

Para o presente algoritmo, os parâmetros do modelo identificados para cada um dos provetes em estudo são apresentados na tabela 6.1 para cada uma das ressonâncias, e na tabela 6.2 considerando as duas primeiras ressonâncias.

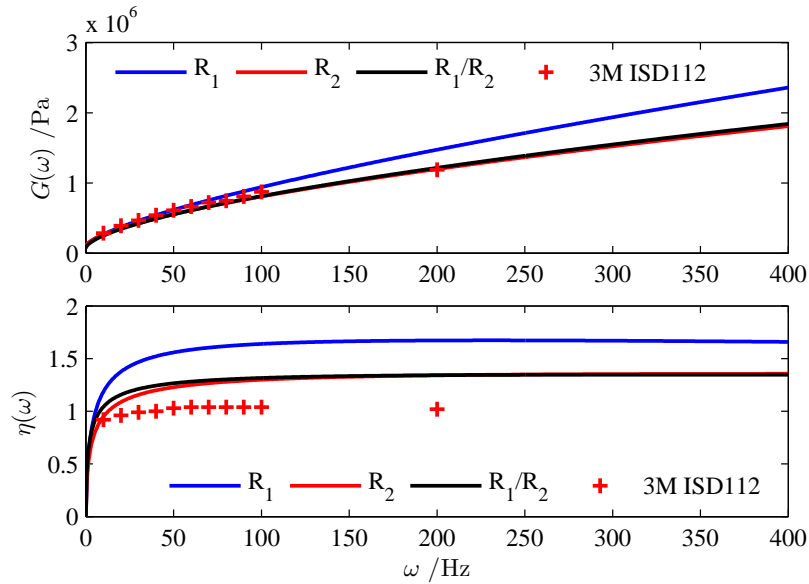
Tabela 6.1: Parâmetros do modelo na primeira e segunda ressonância com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$

Provete		ω_A/Hz	ω_B/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	R ₁	42	53	9.990×10^4	1.000×10^8	0.692	4.686×10^{-6}
	R ₂	264	199	9.728×10^4	1.001×10^8	0.628	1.527×10^{-6}
P220	R ₁	29.25	35.25	9.993×10^4	1.000×10^8	0.695	5.299×10^{-6}
	R ₂	199.75	141.5	9.626×10^4	1.001×10^8	0.615	1.651×10^{-6}
P300	R ₁	15.75	18.5	1.000×10^5	1.000×10^8	0.627	1.658×10^{-6}
	R ₂	112.75	88	9.964×10^4	1.000×10^8	0.618	1.745×10^{-6}

Tabela 6.2: Parâmetros do modelo considerando as duas primeiras ressonâncias com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$

Provete	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	7.218×10^4	1.004×10^8	0.621	1.480×10^{-6}
P220	7.032×10^4	1.013×10^8	0.614	1.645×10^{-6}
P300	9.680×10^4	1.002×10^8	0.627	1.866×10^{-6}

As representações de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$, obtidos por identificação na vizinhança da primeira ressonância (R₁), segunda ressonância (R₂) e considerando as duas ressonâncias (R₁/R₂), são ilustradas nas figuras 6.1, 6.2 e 6.3 para os diversos provetes. Apresenta-se, também, a representação das propriedades recorrendo ao nomograma do material [6].

Figura 6.1: Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação multiressonância

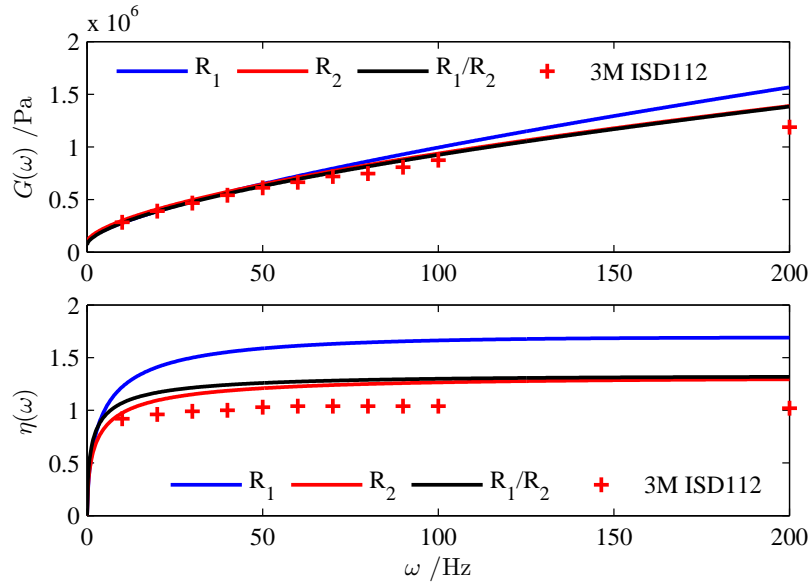


Figura 6.2: Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação multiressonância

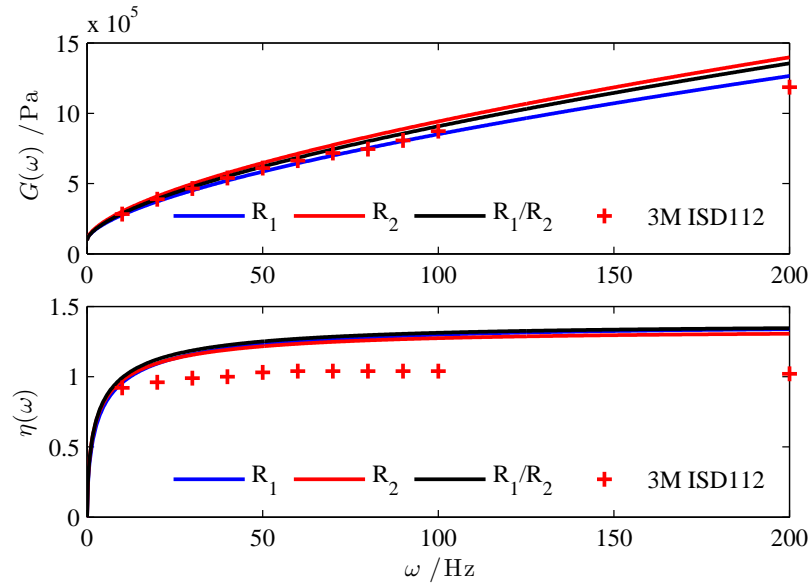


Figura 6.3: Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação multiressonância

Algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$

Do mesmo modo, foram determinados os parâmetros do modelo dos diferentes provetes com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$, e os resultados são apresentados nas tabelas 6.3 e 6.4.

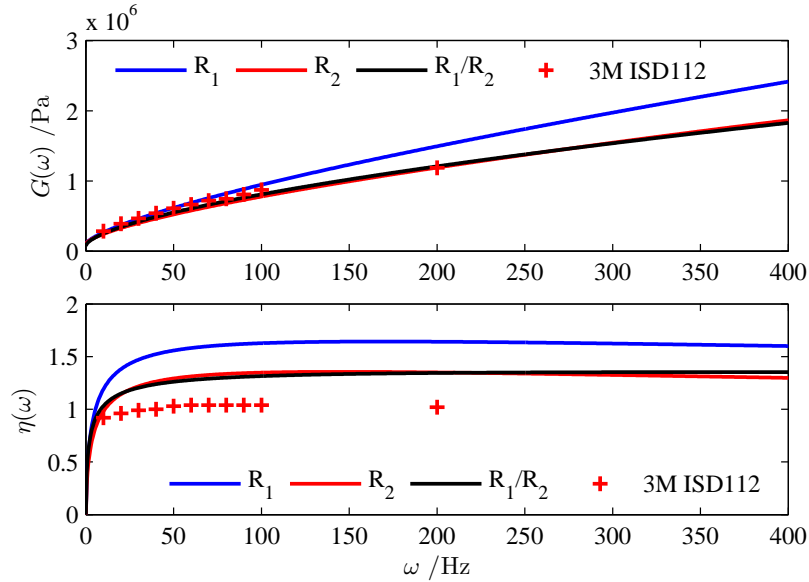
Tabela 6.3: Parâmetros do modelo na primeira e segunda ressonância com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

Provete		ω_A/Hz	ω_B/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	R ₁	42	53	9.983×10^4	6.576×10^7	0.695	8.850×10^{-6}
	R ₂	264	199	9.897×10^4	2.716×10^7	0.659	1.560×10^{-5}
P220	R ₁	29.25	35.25	1.000×10^5	6.807×10^7	0.697	9.440×10^{-6}
	R ₂	199.75	141.5	9.859×10^4	2.173×10^7	0.655	2.690×10^{-5}
P300	R ₁	15.75	18.5	1.000×10^5	5.847×10^7	0.629	3.993×10^{-6}
	R ₂	112.75	88	9.946×10^4	5.017×10^7	0.626	5.806×10^{-6}

Tabela 6.4: Parâmetros do modelo considerando as duas primeiras ressonâncias com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

Provete	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	7.440×10^4	1.153×10^8	0.621	1.160×10^{-6}
P220	9.243×10^4	3.942×10^7	0.630	8.710×10^{-6}
P300	1.054×10^5	1.393×10^7	0.668	5.927×10^{-5}

A caracterização das propriedades do material viscoelástico é apresentada nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6 para cada provete.

Figura 6.4: Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação multiressonância

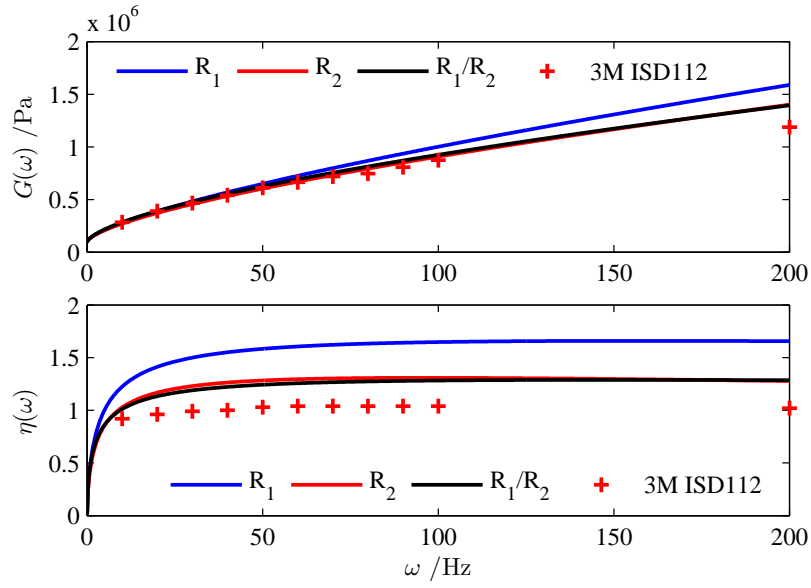


Figura 6.5: Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação multiressonância

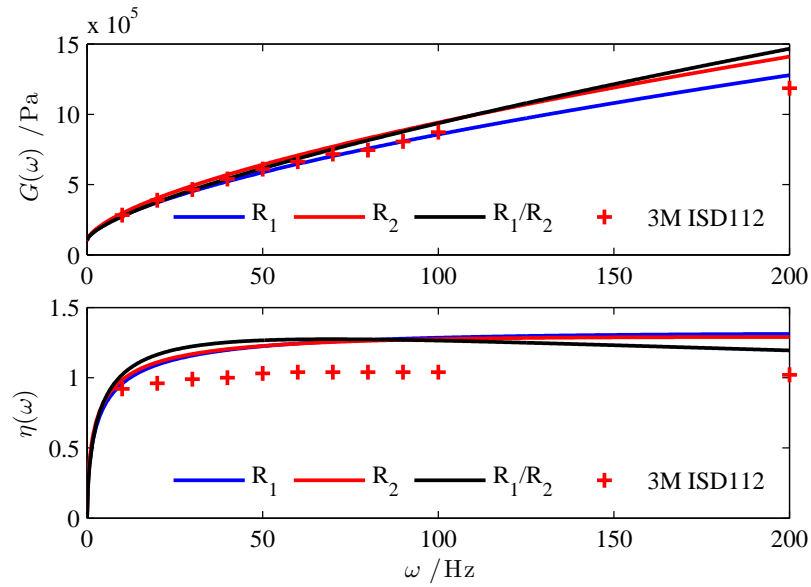


Figura 6.6: Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação multiressonância

6.3 Identificação multifunção

De seguida, procedeu-se à caracterização das propriedades do material através da comparação da função transmissibilidade, medida em diferentes pontos da viga, e a numérica. Os parâmetros do modelo foram determinados recorrendo aos dois algoritmos de identificação desenvolvidos com base numa função de minimização definida por um desvio global, dado pela soma de cada um dos desvios entre a transmissibilidade experimental e numérica para cada um dos nós considerados. O esquema representativo do processo de identificação inversa multifunção é ilustrado na figura 6.7.

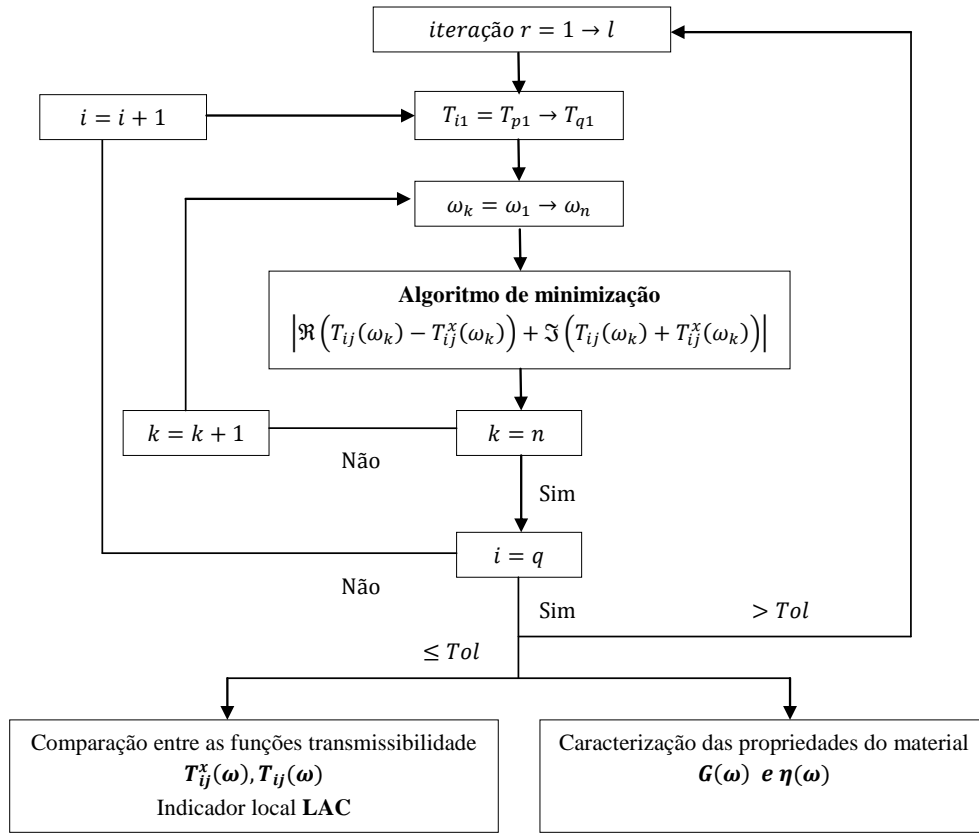


Figura 6.7: Fluxograma do processo de identificação inversa multifunção

6.3.1 Identificação com duas funções transmissibilidade

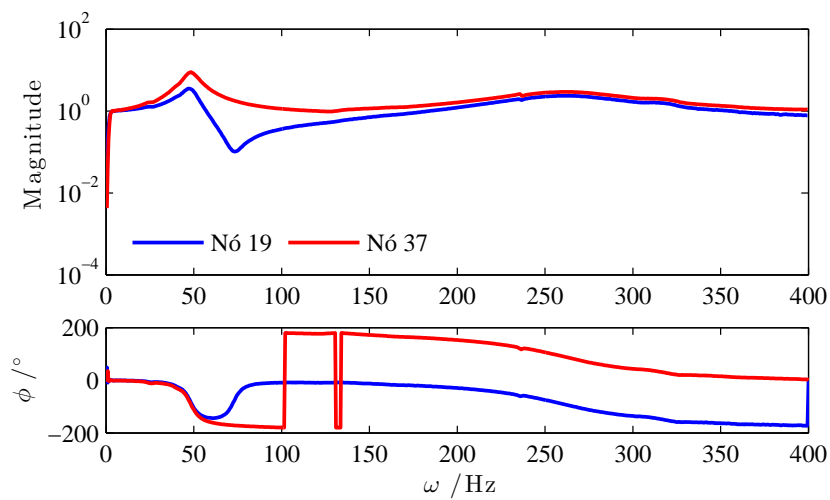
Baseado no processo de identificação proposto, foi desenvolvido um método de identificação para a caracterização do módulo complexo com comparação das funções transmissibilidade experimentais e numéricas considerando dois nós de medição, o nó situado na extremidade livre e o nó situado a meio da secção do provete. A identificação dos nós de medição é apresentada na tabela 6.5.

Refira-se que, o estudo apresentado com a identificação de duas funções transmissibilidade foi desenvolvido considerando apenas a primeira ressonância de cada provete.

Tabela 6.5: Identificação dos nós de medição

Provete	Nó de medição	
	Meio de secção	Extremidade livre
P180	19	37
P220	23	45
P300	31	61

As funções transmissibilidade foram medidas para os três provetes e conforme o procedimento experimental descrito na secção 3.9 a uma temperatura ambiente de $\approx 20^\circ\text{C}$, e são ilustradas nas figuras 6.8, 6.9 e 6.10.

Figura 6.8: Transmissibilidades experimentais do provete P180 - $T \approx 20^\circ\text{C}$

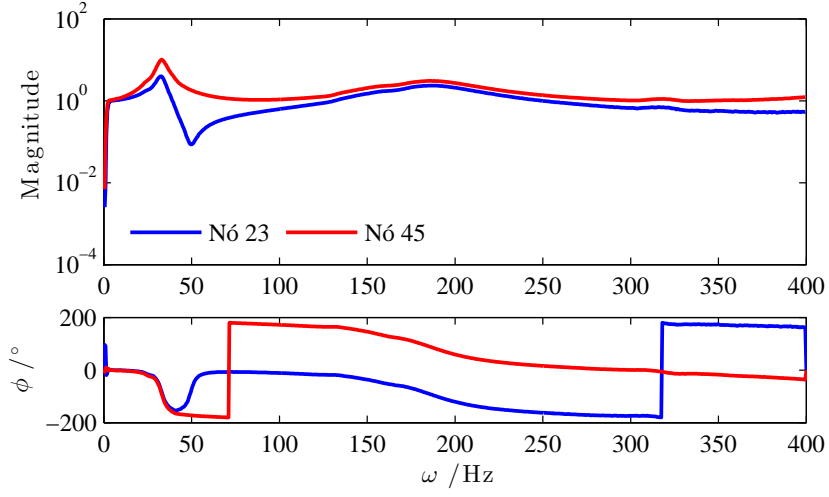


Figura 6.9: Transmissibilidades experimentais do provete P220 - $T \approx 20^\circ\text{C}$

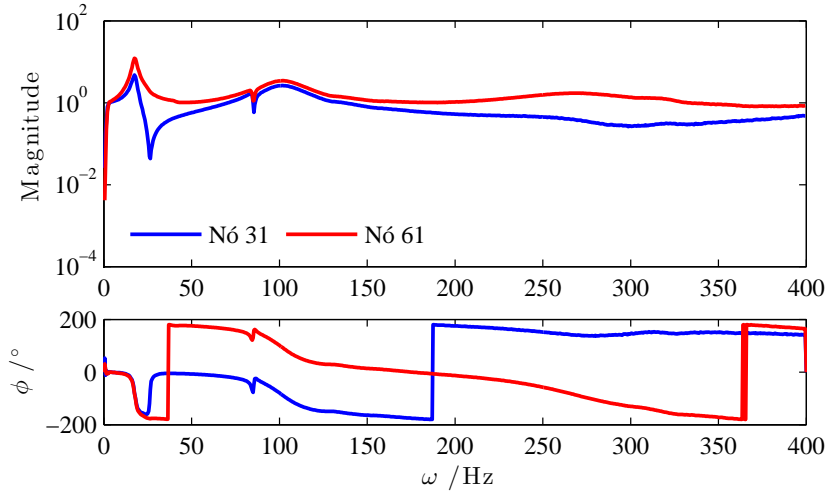


Figura 6.10: Transmissibilidades experimentais do provete P300 - $T \approx 20^\circ\text{C}$

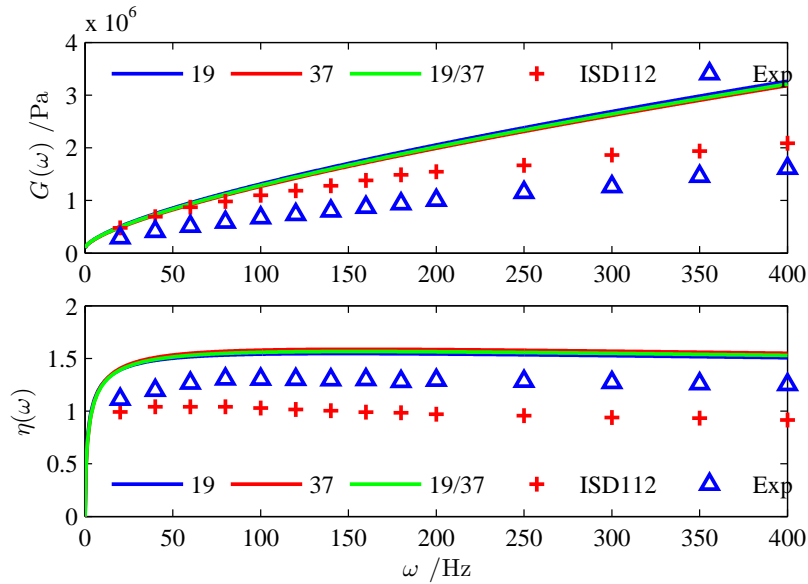
Algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$

Os resultados obtidos para os parâmetros do modelo constitutivo recorrendo ao algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ são apresentados na tabela 6.6.

Tabela 6.6: Parâmetros do modelo com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade

Provete	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	1.000×10^5	9.999×10^7	0.673	6.071×10^{-6}
P220	1.000×10^5	6.464×10^7	0.592	5.441×10^{-6}
P300	9.999×10^4	1.000×10^8	0.621	1.570×10^{-6}

Foram obtidas as propriedades $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ considerando apenas o nó de medição situado na extremidade livre de cada provete, o nó de medição situado a meio da secção e considerando os dois nós, na vizinhança da primeira ressonância. Apresentam-se, também, os resultados obtidos para as propriedades recorrendo ao nomograma do material [6] e a resultados experimentais [2], ilustradas nas figuras 6.11, 6.12, 6.13 e 6.14.

Figura 6.11: Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade

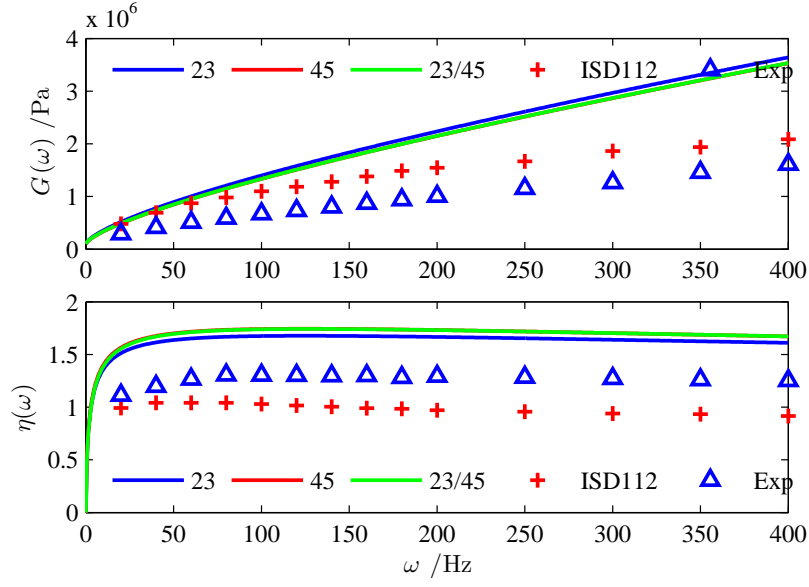


Figura 6.12: Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo $\alpha \tau$ - G_0 G_∞ - identificação com duas funções transmissibilidade

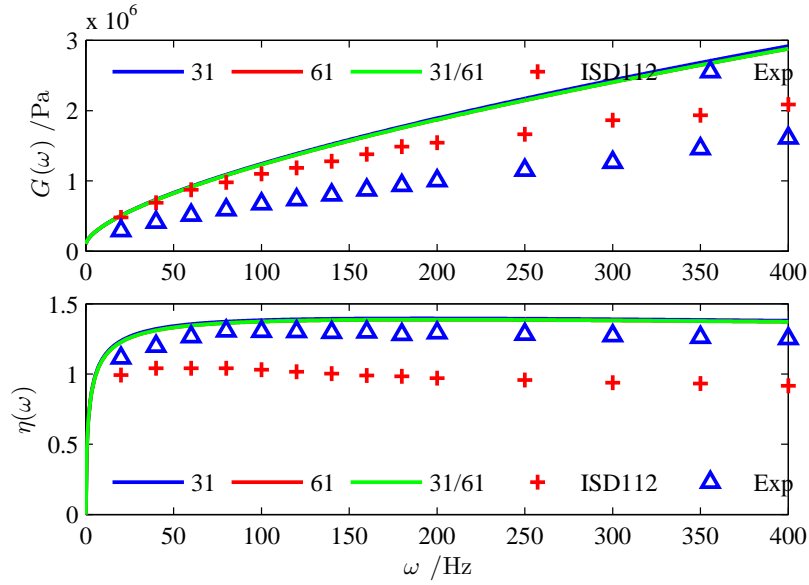


Figura 6.13: Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo $\alpha \tau$ - G_0 G_∞ - identificação com duas funções transmissibilidade

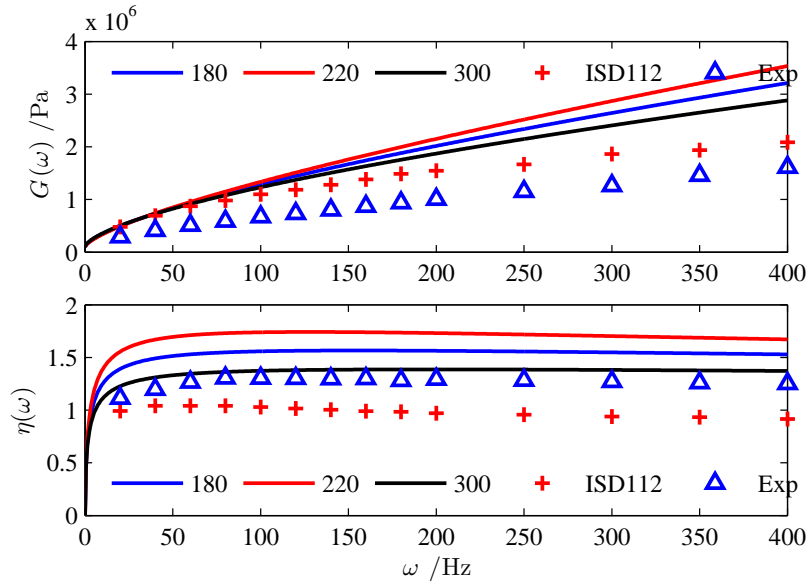


Figura 6.14: Propriedades do material viscoelástico para os diferentes provetes com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com duas funções transmissibilidade - $T \approx 20^\circ\text{C}$

A partir das funções transmissibilidade experimentais medidas a 20°C , foram determinados os erros na estimativa das propriedades considerando os dois nós de medição, relativamente aos resultados obtidos com o nomograma do material [6] e com resultados experimentais [2]. Os resultados são apresentados na tabela 6.7 e as respectivas representações nas figuras 6.19, 6.20 e 6.21.

Tabela 6.7: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty - T \approx 20^\circ\text{C}$

Provete	ISD112		Experimental	
	Erro G (%)	Erro η (%)	Erro G (%)	Erro η (%)
$\omega=100\text{Hz}$				
P180	14.47	33.89	47.69	16.32
P220	17.56	40.76	49.58	25.01
P300	10.64	24.99	45.35	5.05
$\omega=200\text{Hz}$				
P180	23.40	37.92	50.18	17.29
P220	28.17	43.95	53.29	25.32
P300	17.48	30.02	46.33	6.76
$\omega=300\text{Hz}$				
P180	29.45	39.36	52.14	17.78
P220	35.01	44.87	55.92	25.26
P300	22.51	32.05	47.44	7.87
$\omega=400\text{Hz}$				
P180	34.99	40.05	49.85	18.11
P220	40.92	45.17	54.42	25.09
P300	27.56	33.18	44.12	8.72

Algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$

Para o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$, os parâmetros do modelo constitutivo identificados são apresentados na tabela 6.8.

Tabela 6.8: Parâmetros do modelo com o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$ - identificação com duas funções transmissibilidade

Provete	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	1.000×10^5	7.173×10^7	0.676	1.028×10^{-5}
P220	1.000×10^5	9.033×10^7	0.704	1.073×10^{-5}
P300	1.000×10^5	6.754×10^7	0.637	6.720×10^{-6}

Nas figuras 6.15 - 6.18 são ilustradas as propriedades do material, determinadas ao longo de toda a banda de frequências em análise. Na tabela 6.9 são apresentados os erros na estimativa das propriedades em relação aos valores de referência.

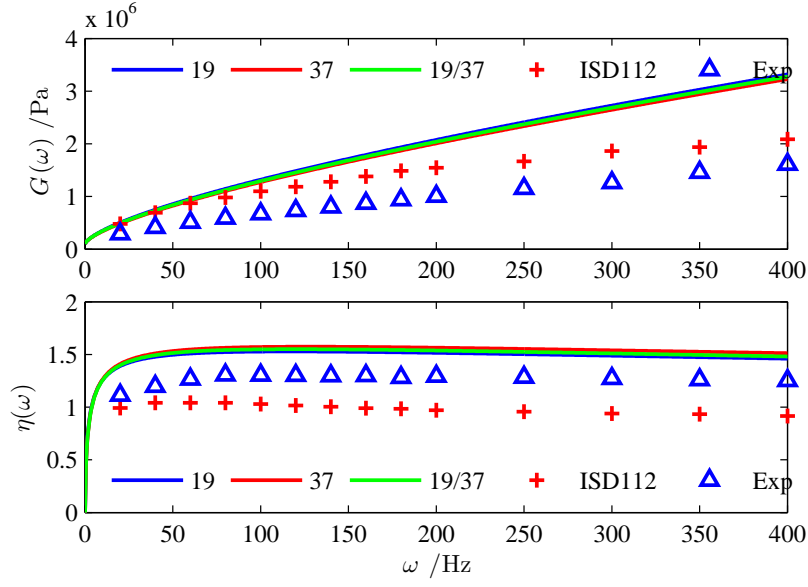


Figura 6.15: Propriedades do material viscoelástico para o provete P180 com o algoritmo G_∞
 $\alpha \tau - G_0$ - identificação com duas funções transmissibilidade

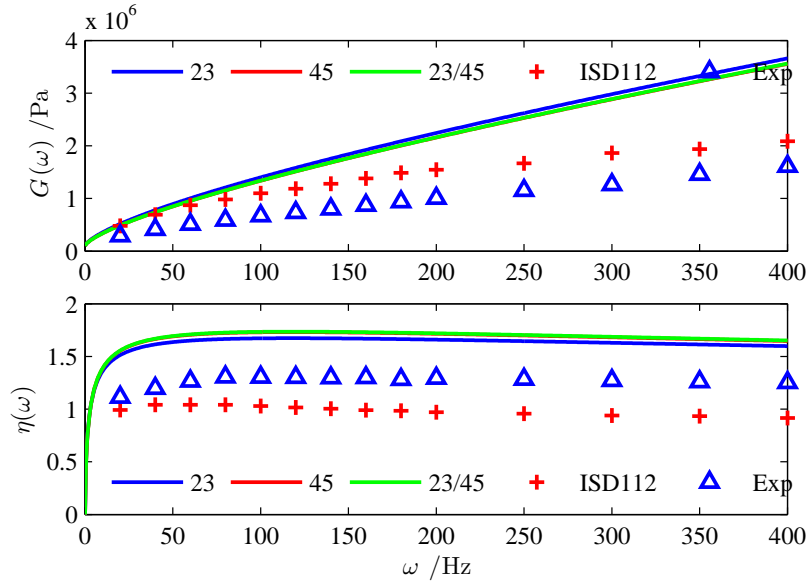


Figura 6.16: Propriedades do material viscoelástico para o provete P220 com o algoritmo G_∞
 $\alpha \tau - G_0$ - identificação com duas funções transmissibilidade

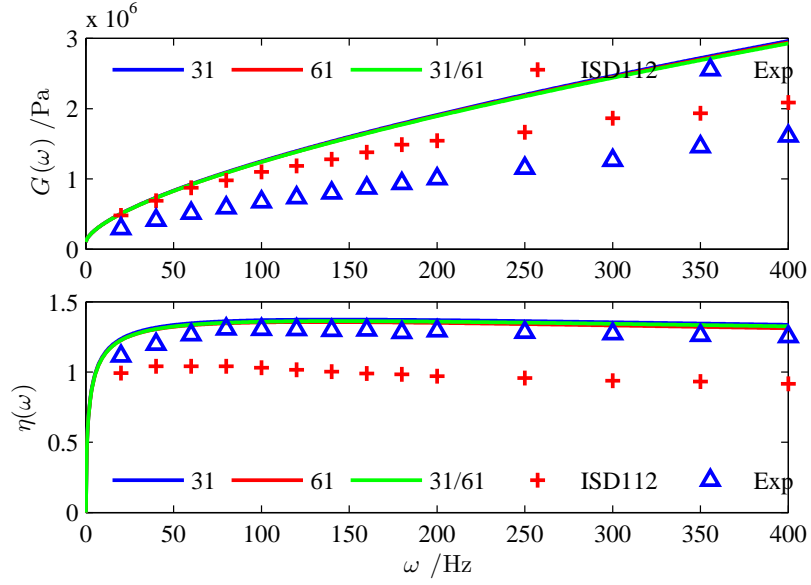


Figura 6.17: Propriedades do material viscoelástico para o provete P300 com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação com duas funções transmissibilidade

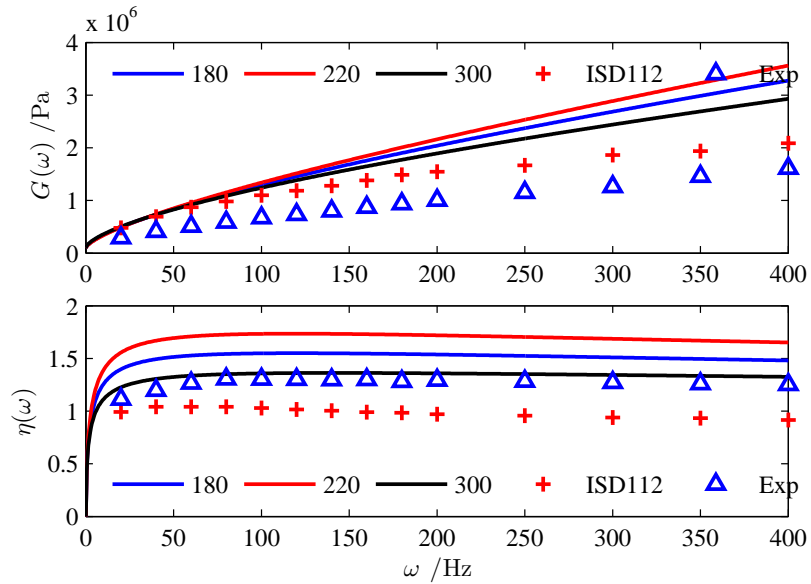


Figura 6.18: Propriedades do material viscoelástico para os vários provetes com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação com duas funções transmissibilidade - $T \approx 20^\circ\text{C}$

Tabela 6.9: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - $T \approx 20^\circ\text{C}$

Provete	ISD112		Experimental	
	Erro G (%)	Erro η (%)	Erro G (%)	Erro η (%)
$\omega=100\text{Hz}$				
P180	14.90	33.47	47.96	15.78
P220	17.76	40.57	49.70	24.77
P300	11.26	24.14	45.73	3.97
$\omega=200\text{Hz}$				
P180	24.29	36.88	50.77	15.9
P220	28.52	43.57	53.51	24.82
P300	18.40	28.56	46.94	4.82
$\omega=300\text{Hz}$				
P180	30.59	37.83	52.92	15.71
P220	35.43	44.34	56.20	24.53
P300	23.60	30.11	48.17	5.25
$\omega=400\text{Hz}$				
P180	36.26	38.10	50.83	15.44
P220	41.37	44.50	54.77	24.18
P300	28.73	30.84	45.02	5.53

A representação dos erros na estimativa das propriedades em função da frequência para os diversos provetes, obtidos com os dois algoritmos propostos, são apresentados nas figuras 6.19, 6.20 e 6.21.

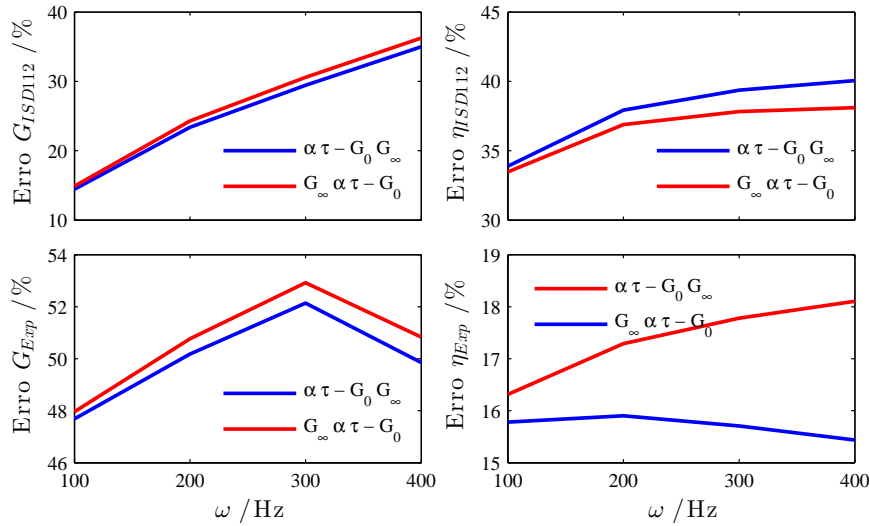


Figura 6.19: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para o provete P180 em função da frequência - $T \approx 20^\circ\text{C}$

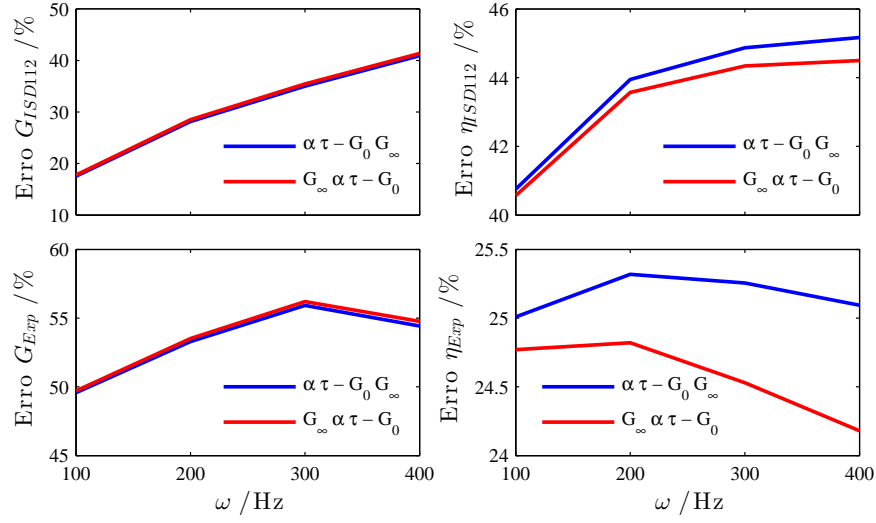


Figura 6.20: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para o provete P220 em função da frequência - $T \approx 20^\circ\text{C}$

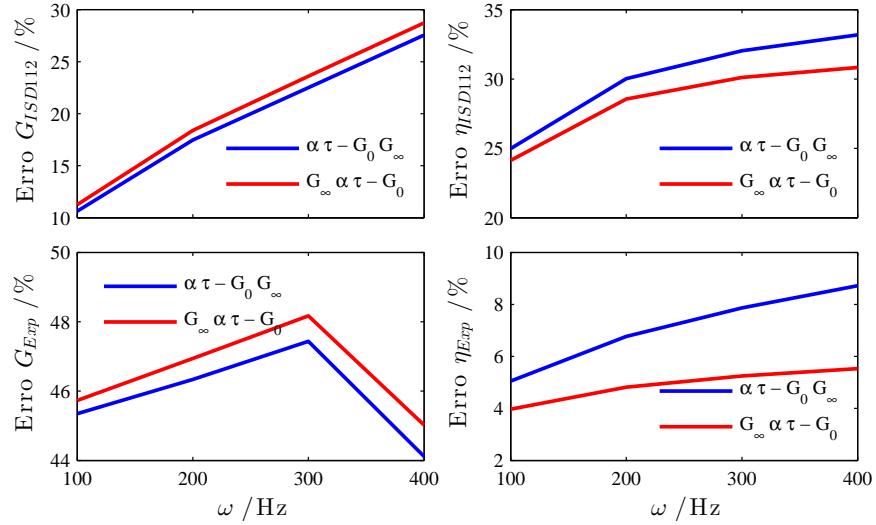


Figura 6.21: Erro na estimativa de $G(\omega)$ e $\eta(\omega)$ para o provete P300 em função da frequência - $T \approx 20^\circ\text{C}$

6.3.2 Identificação com seis funções transmissibilidade

Foi ainda realizado um estudo comparativo de funções transmissibilidade medidas em várias secções do provete P220 e geradas numericamente, para os dois algoritmos de identificação estabelecidos.

Para os dois algoritmos, procedeu-se a uma caracterização das propriedades do material viscoelástico considerando diferentes conjuntos de funções transmissibilidade experimentais,

comparadas com a respectiva função transmissibilidade numérica, para a identificação dos parâmetros do modelo constitutivo, considerando diferentes bandas de ressonância.

A localização de cada nó de medição é apresentada na tabela 6.10, e na figura 6.22 são ilustradas as diversas funções transmissibilidade experimental medidas nas várias secções do provete.

Tabela 6.10: Localização dos nós de medição

	Nó 5	Nó 13	Nó 21	Nó 29	Nó 37	Nó 45
Distância ao encastramento /mm	20	60	100	140	180	220

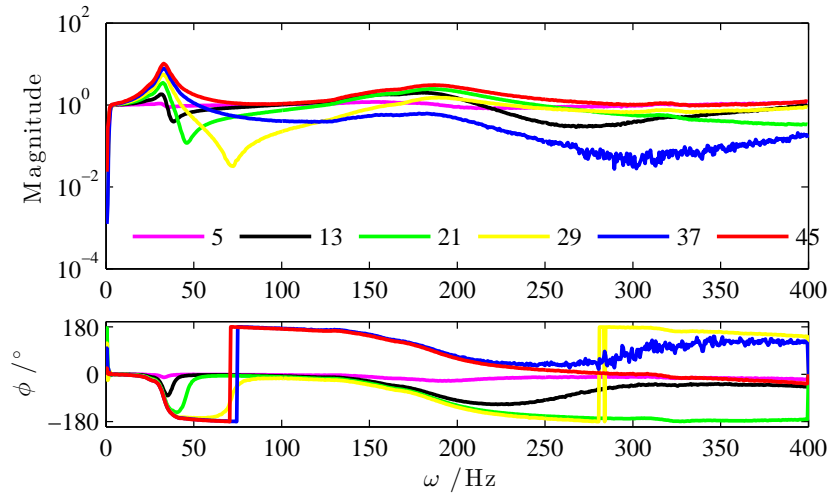
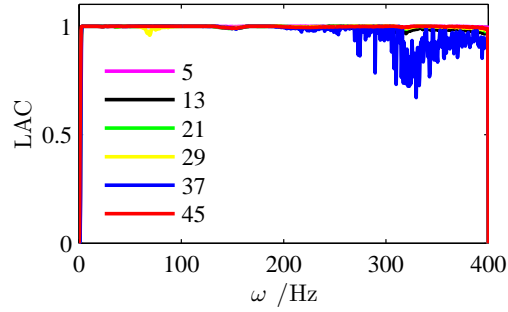


Figura 6.22: Transmissibilidade experimental medida em diferentes secções do provete - $T \approx 20^\circ\text{C}$

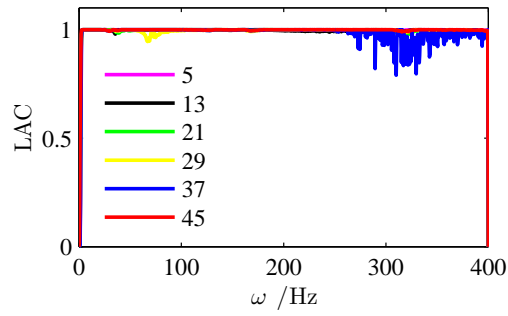
As funções transmissibilidade medidas encontram-se dentro do esperado. No entanto, para o nó 37 verifica-se uma grande perturbação (ruído experimental) na banda de frequências mais elevadas da banda de medição.

Algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$

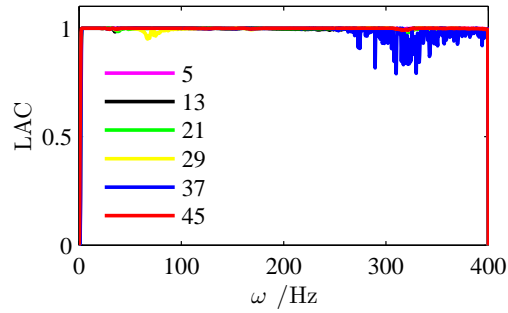
Na figura 6.23 é ilustrado o indicador local LAC obtido para cada nó de medição, quando feita uma comparação das funções transmissibilidade considerando os seis nós de medição, na vizinhança da primeira ressonância, segunda ressonância e considerando as duas primeiras ressonâncias. A representação das propriedades do material viscoelástico, para diferentes conjuntos de nós de medição considerados nas diferentes ressonâncias, são ilustradas nas figuras 6.24, 6.25 e 6.26 para o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$.



(a) Provete P180



(b) Provete P220



(c) Provete P300

Figura 6.23: Indicador local LAC - algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$

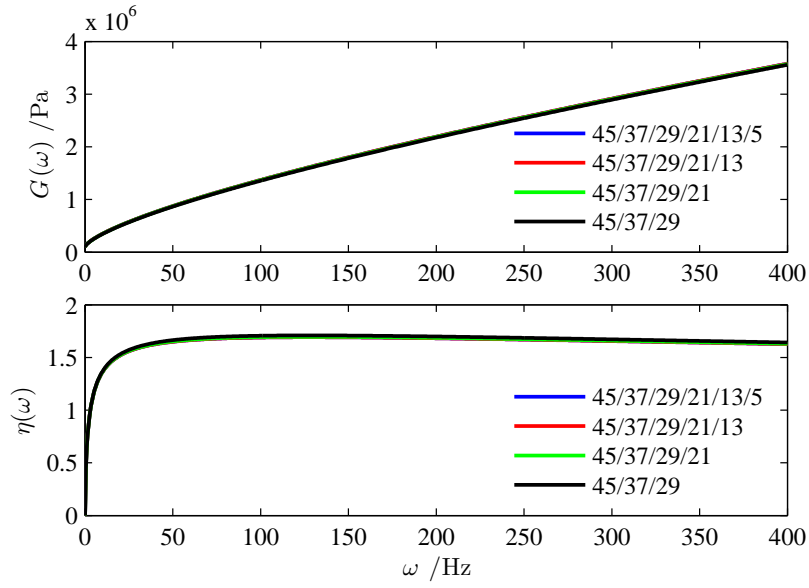


Figura 6.24: Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da primeira ressonância

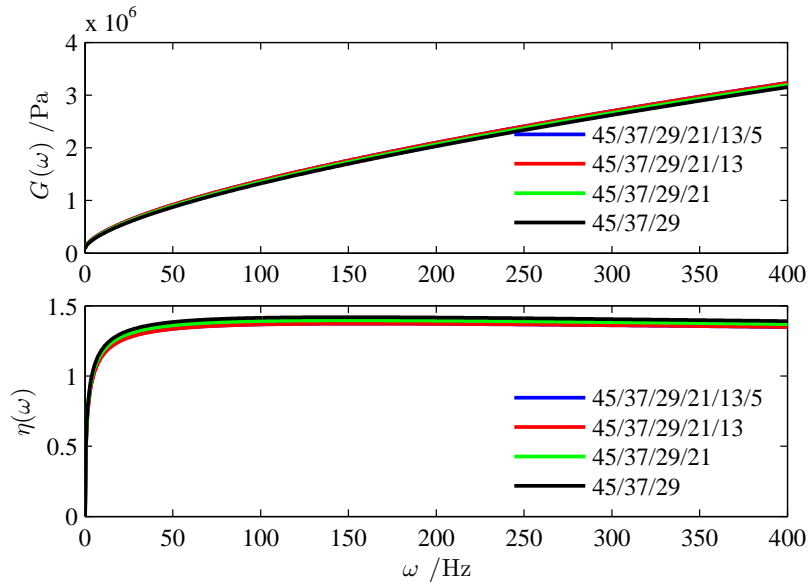


Figura 6.25: Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da segunda ressonância

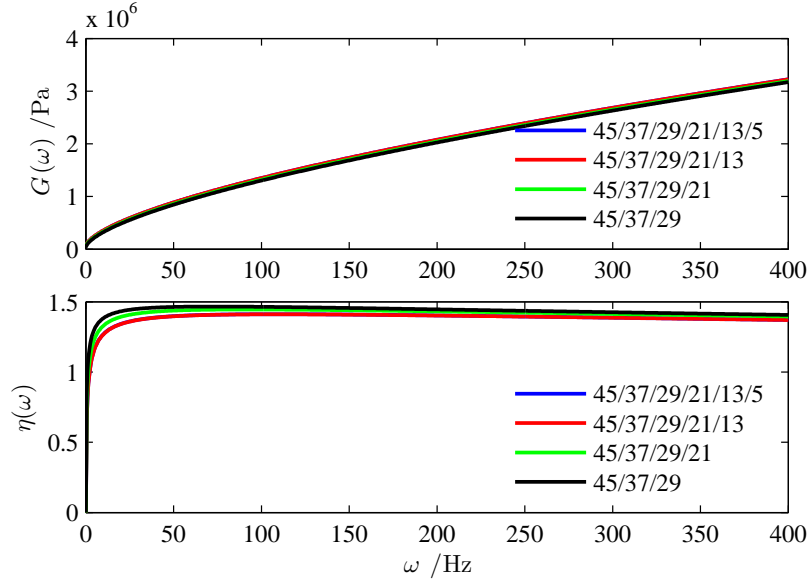


Figura 6.26: Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade considerando as duas primeiras ressonâncias

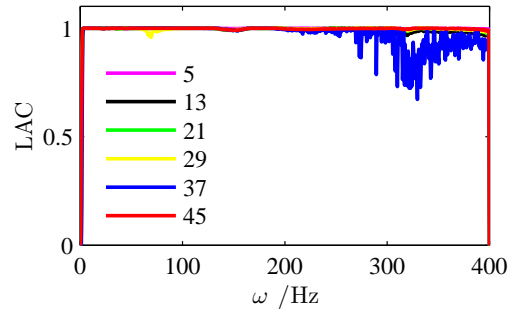
Os parâmetros do modelo constitutivo foram determinados, com base na comparação simultânea das funções transmissibilidade dos seis nós de medição, para cada ressonância considerada, e são apresentados na tabela 6.11.

Tabela 6.11: Parâmetros do modelo com o algoritmo $\alpha \tau - G_0 G_\infty$ - identificação com seis funções transmissibilidade

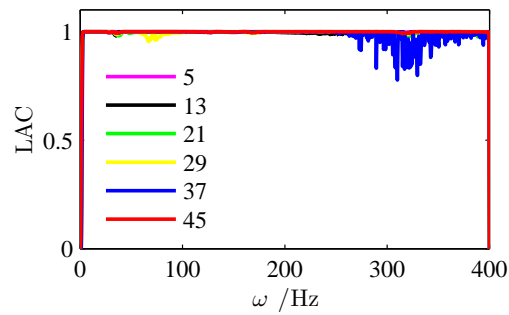
	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
R_1	1.000×10^5	1.000×10^8	0.696	8.730×10^{-6}
R_2	9.419×10^4	1.001×10^8	0.631	4.070×10^{-6}
R_1/R_2	5.961×10^4	1.006×10^8	0.633	4.170×10^{-6}

Algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$

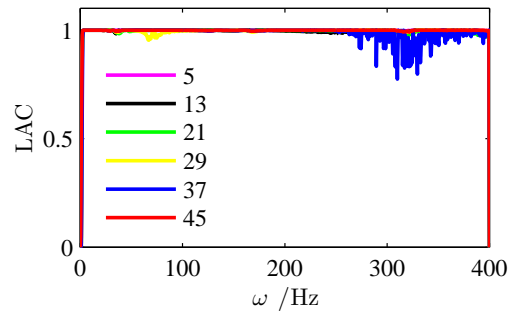
Procedeu-se a uma análise idêntica à do algoritmo anterior para o algoritmo $G_\infty \alpha \tau - G_0$. Os diferentes indicadores locais LAC obtidos são apresentados na figura 6.27, e as propriedades do material são ilustradas nas figuras 6.28, 6.29 e 6.30.



(a) Provete P180



(b) Provete P220



(c) Provete P300

Figura 6.27: Indicador local LAC - algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$

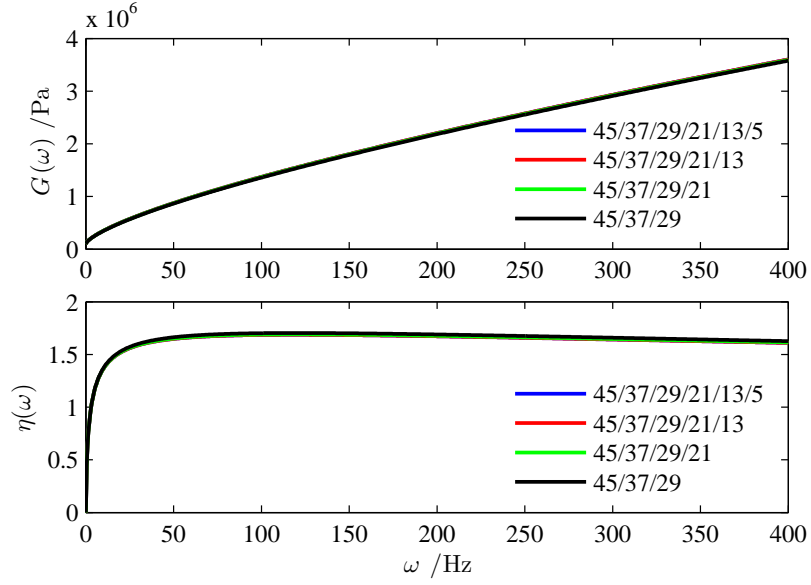


Figura 6.28: Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da primeira ressonância

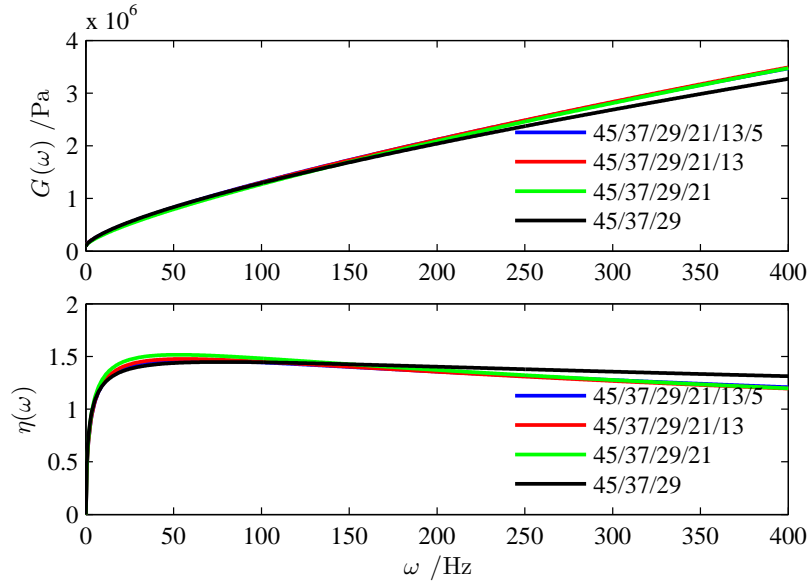


Figura 6.29: Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação com seis funções transmissibilidade na vizinhança da segunda ressonância

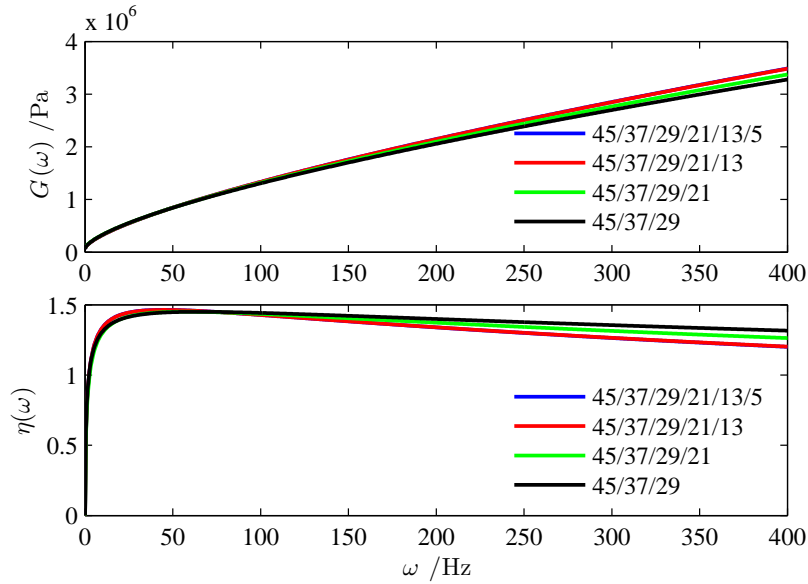


Figura 6.30: Propriedades do material viscoelástico com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação com seis funções transmissibilidade considerando as duas primeiras ressonâncias

Os parâmetros do modelo constitutivo identificados a partir da comparação das funções transmissibilidade dos seis nós de medição, para cada ressonância, são apresentados na tabela 6.12.

Tabela 6.12: Parâmetros do modelo com o algoritmo $G_\infty \propto \tau - G_0$ - identificação com seis funções transmissibilidade

	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
R ₁	1.000×10^5	9.130×10^7	0.696	1.002×10^{-5}
R ₂	1.039×10^5	2.575×10^7	0.688	4.909×10^{-5}
R ₁ /R ₂	8.189×10^4	1.003×10^8	0.632	4.110×10^{-6}

6.4 Análise dos resultados

Os resultados obtidos na caracterização das propriedades do material viscoelástico, para os dois métodos de identificação propostos, são extremamente satisfatórios. A representação do módulo de ganho, $G(\omega)$, e factor de perda, $\eta(\omega)$, não apresenta variações significativas com o número de funções transmissibilidade consideradas em que, para os diferentes casos analisados, há uma quase total sobreposição das diferentes curvas obtidas.

Apenas a representação do factor de perda na vizinhança da segunda ressonância e considerando as duas primeiras ressonâncias (figuras 6.29 e 6.30), para o algoritmo de identificação $G_\infty \propto \tau - G_0$, apresenta uma ligeira variação nas bandas de frequências mais baixas.

A comparação dos resultados obtidos com os fornecidos pelo nomograma do material [6] e recorrendo a resultados experimentais [2], realizada com base na determinação do erro na estimativa das propriedades, fornecidos nas tabelas 6.7 e 6.9 para os respectivos algoritmos, permite constatar que os resultados para o módulo de ganho $G(\omega)$, encontram-se mais próximos

dos obtidos com nomograma para os três provetes. Porém, para o factor de perda $\eta(\omega)$, o mesmo não se verifica, estando a sua representação mais próxima da obtida com os resultados experimentais. Contudo, para todas as frequências analisadas, o erro obtido é sempre inferior para o provete P300, seguindo-se P180 e P220, revelando que as propriedades do material podem ser determinadas mais correctamente com base no provete P300.

Comparando estes resultados com os fornecidos na tabela 4.10, na qual as propriedades foram determinadas com base em funções transmissibilidade medidas a 24°C, é possível constatar que o erro na estimativa das propriedades a 24°C é inferior ao obtido a 20°C.

6.5 Conclusões

- A consideração apenas da primeira ressonância com os algoritmos propostos, apresenta resultados muito semelhantes aos obtidos na vizinhança da segunda ressonância e considerando as duas primeiras ressonâncias, podendo-se dizer que a selecção das frequências de controlo situadas na vizinhança da primeira ressonância é suficiente para a correcta caracterização das propriedades de materiais viscoelásticos na banda de medição das TRs;
- A caracterização do módulo complexo com base numa identificação inversa multifunção não apresenta grandes variações com o número de funções transmissibilidade consideradas. Face a estes resultados, é possível concluir que a representação do módulo complexo com base apenas na comparação das funções transmissibilidade experimental e numérica do nó situado na extremidade livre, é um método bastante eficiente na caracterização das propriedades de materiais viscoelásticos;
- A comparação dos resultados obtidos com os dois algoritmos com os resultados obtidos através do nomograma do material e de resultados experimentais, revelaram que a representação do módulo de ganho, $G(\omega)$, aproxima-se mais do nomograma do material, e a representação do factor de perda $\eta(\omega)$ aos resultados experimentais;
- O provete P300 apresenta erros inferiores na estimativa das propriedades relativamente aos restantes provetes para as frequências consideradas;
- A determinação das propriedades com base na comparação de funções transmissibilidade a 24°C conduziram a resultados mais adequados na caracterização das propriedades do material, conseguindo-se determinar o módulo de ganho e factor de perda com menor erro para toda a banda de frequências analisada.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Conclusões

De acordo com os objectivos estabelecidos, as propriedades de materiais viscoelásticos foram investigadas, recorrendo a diferentes metodologias, com vista a uma melhor compreensão do comportamento dinâmico de estruturas com tratamentos viscoelásticos recorrendo, para tal, à caracterização do módulo complexo destes materiais.

Assim, a partir da modelação espacial com base no método de elementos finitos, foi desenvolvido um processo de identificação dos parâmetros do modelo constitutivo representativo da estrutura em análise. A partir da sua simulação numérica e análise experimental, foi possível representar as propriedades destes materiais tendo em conta os diversos factores que as influenciam.

Do desenvolvimento do trabalho proposto, foram retiradas as seguintes conclusões:

Processo de identificação

- O método inverso proposto de identificação das propriedades de materiais viscoelásticos desenvolvido numa fase inicial, apresenta grande sensibilidade à selecção das frequências de controlo, com resultados fisicamente inconsistentes na identificação dos parâmetros do modelo constitutivo e invalidando, assim, a caracterização do módulo complexo para certas bandas de frequências. Porém, os resultados obtidos para os parâmetros do modelo não aparentam influenciar de modo significativo a função de transmissibilidade numérica nem a sua correlação com a experimental, dada pelo indicador local LAC;
- Os fracos resultados para determinadas bandas de frequências poderão derivar de funções de transmissibilidade perturbadas por ruído experimental.
- A definição de algoritmos de identificação bi-tápicos requer uma escolha adequada dos parâmetros a otimizar em cada etapa. Dos diversos algoritmos desenvolvidos, apenas os algoritmos $\alpha - \tau - G_0 - G_\infty$ e $G_\infty - \alpha - \tau - G_0$ apresentaram resultados satisfatórios;
- Os dois algoritmos estabelecidos conduziram a uma melhoria significativa do processo de identificação, permitindo uma maior flexibilidade na selecção das frequências de controlo;
- Os algoritmos revelaram ser insensíveis à estimativa inicial dos parâmetros do modelo, tornando-os num método robusto e eficiente de identificação dos parâmetros do modelo constitutivo de materiais viscoelásticos;

Análise de sensibilidades

- A análise de sensibilidades desenvolvida com base na definição de sensibilidades, revelou que o módulo complexo, representado pelo modelo de derivadas fraccionárias de quatro parâmetros, apresenta maior sensibilidade ao parâmetro τ , seguindo-se α , G_0 e G_∞ ;
- A sensibilidade das propriedades com respeito aos parâmetros do modelo constitutivo é característica do algoritmo de identificação utilizado, uma vez que os parâmetros determinados em cada fase do processo iterativo são também diferentes consoante o algoritmo de identificação utilizado;
- Apesar das propriedades do material viscoelástico, módulo de ganho $G(\omega)$ e factor de perda $\eta(\omega)$, apresentarem ambas maior sensibilidade aos parâmetros τ e α , verificou-se que $\eta(\omega)$ é mais sensível a variações dos parâmetros G_0 e G_∞ do que o $G(\omega)$.

Identificação inversa multiressonância e multifunção

- Os resultados obtidos na identificação dos parâmetros do modelo constitutivo e na caracterização das propriedades do material viscoelástico, a partir de uma identificação inversa multiressonância e multifunção, foram bastante satisfatórios;
- Com os dois algoritmos propostos, é possível garantir a correcta caracterização das propriedades de materiais viscoelásticos ao longo de toda a banda de frequências em análise com base, apenas, na comparação entre as funções transmissibilidade medidas e geradas na extremidade livre do provete, na vizinhança de uma ressonância. Assim, é possível garantir um processo de identificação bastante eficaz, devido ao reduzido número de ensaios experimentais necessários, bem como à redução do esforço computacional conseguido com a selecção de um menor número de frequências de controlo.
- A análise baseada na identificação multifunção permitiu validar que, apesar da consistência dos resultados obtidos com o algoritmo $\alpha - \tau - G_0 - G_\infty$, o algoritmo $G_\infty - \alpha - \tau - G_0$ permite uma caracterização das propriedades mais próxima do real sendo, por isso, o mais adequado para descrever convenientemente o comportamento de materiais viscoelásticos.
- A comparação de diferentes resultados obtidos a diferentes temperaturas e frequências, permitiu constatar que o provete P300 permite uma caracterização mais adequada do módulo complexo do material, conduzindo a uma melhor estimativa das propriedades.

7.2 Sugestão de trabalhos futuros

No decorrer do desenvolvimento desta dissertação, foram surgindo diversas ideias no sentido de complementar e melhorar o trabalho proposto.

Em relação ao método inverso proposto, a escolha de um algoritmo de minimização que permita a introdução de condições de restrição para que os parâmetros do modelo constitutivo não tomem valores negativos, poderá reduzir, ou mesmo eliminar, o número de casos para os quais são obtidos resultados inválidos.

A escolha de outra função de minimização disponível pelo *Matlab*[®] que implemente um algoritmo de minimização diferente poderá, também, conduzir a uma melhoria dos resultados.

Um controlo mais rigoroso na realização dos ensaios experimentais que permita gerar funções transmissibilidade menos perturbadas por ruído experimental, bem como a utilização de uma câmara ambiental para um melhor controlo da temperatura durante os ensaios.

A utilização de novos provetes na realização dos ensaios experimentais poderá eliminar algumas inconsistências encontradas, nomeadamente, a perturbação verificada na função transmissibilidade experimental do provete P300 cuja origem é desconhecida.

A caracterização das propriedades do material viscoelástico com base na análise de funções transmissibilidade medidas para uma maior gama de temperaturas permitirá avaliar mais detalhadamente a dependência das propriedades face à temperatura, permitindo justificar alguns dos resultados obtidos.

Apêndices

Apêndice A

Formulação do elemento finito *layerwise*

A.1 Introdução

A representação de tratamentos viscoelásticos, aplicados numa configuração integrada do tipo *sandwich* ou numa configuração de tratamento superficial com restrição, recorrendo a modelos de elementos finitos baseados em teorias *layerwise*, permite a simulação do comportamento dinâmico da estrutura tratada que depende da correcta representação da deformação de corte da camada viscoelástica dissipativa e da energia de dissipação associada.

A formulação do elemento finito com base na teoria *layerwise* será definida considerando os seguintes pressupostos,

- As teorias linear elástica e viscoelástica são consideradas;
- A translação e rotação de inércia de todas as camadas são consideradas;
- O material de cada camada é considerado homogéneo e isotrópico.

Para tal, será definido o campo de deslocamentos do elemento que, a partir da teoria da deformação por camadas que constitui a base do modelo *layerwise* desenvolvido, associa um campo independente de rotações a cada uma das camadas individuais, sendo os campos de tensão e deformação obtidos a partir do mesmo.

As expressões para a energia potência e energia cinética serão estabelecidas, bem como a equação de movimento do elemento. As matrizes de massa e rigidez de cada uma das camadas serão obtidas a partir da teoria de *Timoshenko*.

A.2 Teoria de *Timoshenko*

Considera-se uma viga de comprimento l , de largura B , espessura h e área de secção A , sobre a qual actua uma carga vertical.

Assim, a teoria de vigas de *Timoshenko* verifica as seguintes hipóteses,

- Deformação em extensão e em corte de todas as camadas são consideradas;
- A deformação ao longo da largura não é considerada;

- As secções rectas permanecem rectas, mas não necessariamente normais ao plano longitudinal após deformação, devido à existência da componente de tensão de corte transversal.

O estado de deformação da viga é caracterizado por duas variáveis,

- Deslocamento normal à viga (w);
- Rotação da secção recta segundo a direcção y (β^y)

Por convenção, assume-se que o vector da variável normal (w) é paralelo ao eixo z permitindo uma maior aproximação da deformação real da secção transversal em vigas.

A cinemática do elemento de viga segundo a teoria de *Timoshenko* é ilustrada na figura A.1.

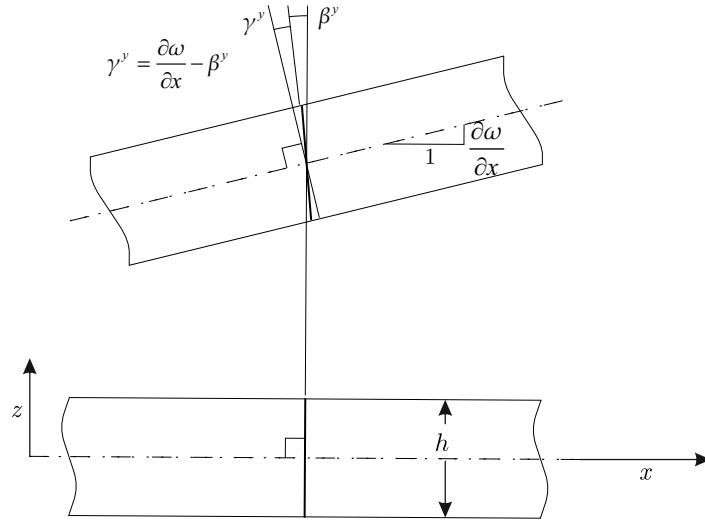


Figura A.1: Modelo cinemático da teoria de flexão de vigas de *Timoshenko* [12]

O domínio do elemento viga é representado por,

$$\Omega_k = \left\{ (x, z_k) \in \mathbb{R}^2 \mid z_k \in \left[-\frac{h_k}{2}, \frac{h_k}{2} \right], x \in l \subset \mathbb{R} \right\} \quad (\text{A.1})$$

sendo Ω_k e h_k a área e a espessura de uma camada genérica k -th, respectivamente.

A partir da figura A.1 é possível definir a rotação da secção normal que é expressa por,

$$\gamma^y = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta^y \quad (\text{A.2})$$

sendo $\frac{\partial w}{\partial x}$ o declive da deformação do eixo da viga e β^y é a rotação adicional devido à deformação por corte.

Assim, o campo de deslocamentos da viga é expresso da seguinte forma,

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z\beta^y \\ w(x, z) &= w \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A partir das equações (A.2) e (A.3) é possível definir as seguintes deformações,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta^y}{\partial x} \\ \gamma^{xz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta^y + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

onde ε^{xx} é a deformação normal e γ^{xz} é a deformação por corte transversal.

A.2.1 Relação deformação-tensão

Sendo a viga considerada isotrópica e homogênea, as duas tensões não nulas, σ^{xx} (componente de flexão da viga) e τ^{xz} (componente de corte transversal), relacionam-se com as correspondentes deformações,

$$\begin{aligned}\sigma^{xx} &= E\varepsilon^{xx} \\ \tau^{xz} &= G\gamma^{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma^{xz}\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

onde E e ν representam o módulo de *Young* e o coeficiente de *Poisson*, respectivamente, do material isotrópico e homogêneo.

A.3 Teoria de deformação por camadas - Modelo *layerwise*

Considerando uma viga laminada constituída por n camadas, figura A.2, é possível associar a cada camada genérica k uma rotação β_k^y particular para essa camada e independente das restantes, permitindo descrever com maior rigor o comportamento de vigas laminadas constituídas por camadas de materiais diferentes, como por exemplo, os tratamentos viscoelásticos [20].

Esta hipótese permite aplicar a teoria de *Timoshenko* individualmente a cada camada, considerando-se a deformação de corte transversal em cada uma das camadas.

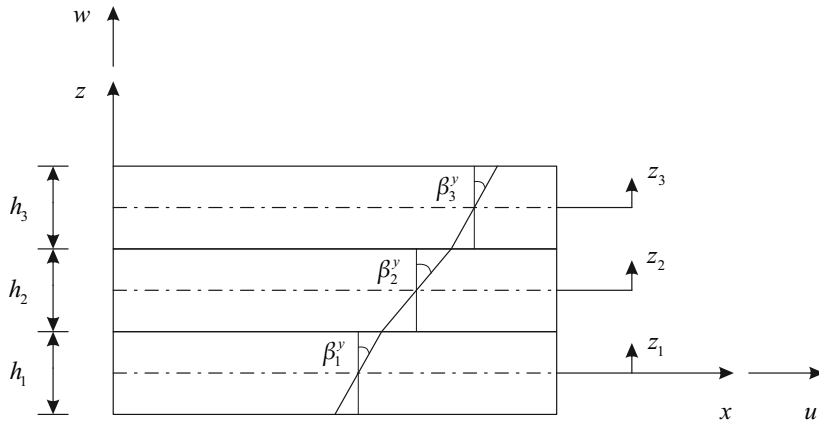


Figura A.2: Teoria de deformação por camada - Modelo *layerwise* [12]

A.4 Campo de deslocamentos

Considerando o modelo *layerwise*, o campo de deslocamentos de uma camada genérica k é definido como,

$$\{u\}_k = \left\{ \begin{array}{c} u_k \\ w_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_0 + \frac{h_1}{2} \beta_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^y + \frac{h_k}{2} \beta_k^y + z_k \beta_k^y \\ w_0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.6})$$

onde u_0 e w_0 são as translações referentes à primeira camada ($k = 1$) e β_k^y é a rotação normal ao eixo dos zz . A continuidade do deslocamento entre as camadas da viga *sandwich* é garantida através de termos de acoplamento presentes na definição do campo de deslocamentos.

O campo de deslocamentos, $\{u\}_k$, pode ser representado a partir da operação matricial,

$$\{u\}_k = [\mathcal{N}]_k \{d\} \quad (\text{A.7})$$

onde,

$$\{d\} = \{u_0, w_0, \beta_1^y, \dots, \beta_k^y, \dots, \beta_n^y\}^T \quad (\text{A.8})$$

representa o campo de deslocamentos generalizado e a matriz $[\mathcal{N}]_k$, da forma, é definida como,

$$[\mathcal{N}]_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{h_1}{2} & \dots & h_j & \dots & \frac{h_k}{2} + z_k & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

permite definir o campo de deslocamentos da camada genérica k a partir do vector de deslocamentos generalizados da viga laminada.

A.5 Campo de deformações

O campo de deformações da camada k é obtido a partir do campo de deslocamentos, dado pela equação (A.6), definido pelo vector de deformações $\{\varepsilon\}_k$,

$$\{\varepsilon\}_k = \{\varepsilon^{xx} \quad \gamma_k^{xz}\}^T \quad (\text{A.10})$$

pode ser escrito na forma,

$$\varepsilon_k^{xx} = \frac{\partial u_k}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma_k^{xz} = \frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$

Assim, aplicando os operadores diferenciais definidos nas equações (A.11) e (A.12) ao campo de deslocamentos descrito na equação (A.6), obtém-se o campo de deformações $\{\varepsilon\}_k$ definido por,

$$\{\varepsilon\}_k = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{xx}^C + \varepsilon_{xx}^B \\ \gamma_{xz}^S \end{array} \right\}_k \quad (\text{A.13})$$

onde M , C , B e S representam as componentes de membrana, acoplamento, flexão e corte transversal, respectivamente, sendo,

$$\varepsilon_{xx}^M = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon_{xx}^C = \frac{h_1}{2} \frac{\partial \beta_1^y}{\partial x} + \sum_{j=2}^{k-1} \left[h_j \frac{\partial \beta_j^y}{\partial x} \right] + \frac{h_k}{2} \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x} \quad (\text{A.15})$$

$$\varepsilon_{xx}^B = z_k \frac{\partial \beta_k^y}{\partial x} \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma_k^{xz} = \beta_k^y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.17})$$

A continuidade do campo de deslocamentos entre as camadas é garantida pela componente de acoplamento.

A.5.1 Matriz de deformação

A partir das equações (A.11) e (A.12), o vector de deformações $\{\varepsilon\}_k$ é obtido a partir do campo de deslocamentos $\{u\}_k$ através da multiplicação deste pela matriz de operadores diferenciais $[\mathcal{L}]$, na forma,

$$\{\varepsilon\}_k = [\mathcal{L}]\{u\}_k \quad (\text{A.18})$$

onde,

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Segundo a equação (A.7), o campo de deslocamentos de uma camada genérica k é definido através das componentes de um vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$, definido na equação (A.8), que representam os graus de liberdade da viga, sendo possível relacionar o campo de deformações directamente a partir do vector de deslocamentos generalizados, através da matriz de deformação $[\mathcal{B}]_k$,

$$\{\varepsilon\} = [\mathcal{B}]_k \{d\} \quad (\text{A.20})$$

A matriz de deformação pode ser obtida pela multiplicação matricial da forma,

$$[\mathcal{B}]_k = [\mathcal{L}][\mathcal{N}]_k \quad (\text{A.21})$$

O vector de campo de deformações pode ser dividido em três componentes, combinando as componentes de membrana e de acoplamento, na forma,

$$\{\varepsilon\}_k = \left\{ \begin{array}{l} \{\varepsilon\}_k^M + \{\varepsilon\}_k^C \quad ; \quad \{\varepsilon\}_k^B \quad ; \quad \{\gamma\}_k^S \end{array} \right\}^T. \quad (\text{A.22})$$

Assim, a matriz de deformação $[\mathcal{B}]_k$ pode ser modificada, sendo definida por três sub-matrizes de deformação independentes,

$$[\mathcal{B}]_k = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & h_j \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_k}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_k \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \middle| [0] \right] \quad (\text{A.23})$$

onde a primeira sub-matriz, $[\mathcal{B}]_k^{MC}$, é a matriz de deformação da componente membrana e acoplamento, a segunda sub-matriz, $[\mathcal{B}]_k^B$, é a matriz de deformação de flexão e a terceira sub-matriz, $[\mathcal{B}]_k^S$, representa a matriz de deformação de corte transversal. A variável h_j ($j = 2, \dots, k-1$) representa a espessura da camada j .

A.6 Campo de tensões

O campo de tensões a que uma camada genérica k da viga está sujeita é determinado pelo respectivo campo de deformações, sendo essa relação definida pela lei constitutiva do material. Assim, e considerando uma camada genérica k , o campo de tensões pode ser definido pelo seguinte vector,

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_k &= \{\sigma_k^{xx} \quad \tau_k^{xy}\}^T \\ &= \left\{ \begin{matrix} \{\sigma\}_k^M & + & \{\sigma\}_k^C & ; & \{\sigma\}_k^B & ; & \{\sigma\}_k^S \end{matrix} \right\}^T \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A.6.1 Matriz elasticidade

O campo de tensões das camadas das vigas *sandwich* é relacionado com o campo de deformações através da lei constitutiva do material, sendo descrito pelo operador matricial $[\mathcal{D}]_k$ como,

$$\{\sigma\}_k = [\mathcal{D}]_k \{\varepsilon\}_k \quad (\text{A.25})$$

Uma vez que o material assumido é considerado isotrópico e com comportamento linearmente elástico, a matriz de elasticidade é definida por:

$$[\mathcal{D}]_k = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Em análise de frequência, a caracterização do material viscoelástico, cujas propriedades variam com a frequência, pode ser representada pelo módulo complexo. Por consequência, as matrizes de rigidez do material viscoelástico são actualizadas conforme o módulo complexo, para cada frequência. Contudo, a formulação do elemento finito do modelo espacial é totalmente independente da relação viscoelástica do modelo constitutivo, o qual pode ser introduzido de modo alternativo recorrendo a outras metodologias, tais como, o método ADF (*Anelastic Displacement Fields*) e o Modelo das derivadas fracionárias.

A.7 Energia potencial de deformação

A energia potencial elástica da viga *sandwich* é obtido através dos integrais sobre a espessura da camada e o seu comprimento, para todo o conjunto de n camadas individuais, como,

$$\begin{aligned} \Pi^P &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\varepsilon\}_k^T \{\sigma\}_k dz_k dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\varepsilon\}_k^T [\mathcal{D}]_k \{\varepsilon\}_k dz_k dx \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

substituindo a equação (A.20) na equação (A.27), e calculando explicitamente o integral em relação à espessura, a energia de deformação é obtida a partir de:

$$\Pi^P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \{d\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d\} dx \quad (\text{A.28})$$

onde a matriz $[\hat{\mathcal{D}}]_k$ é a matriz de elasticidade modificada, incluindo agora o resultado dos termos de integração analítica, sendo,

$$[\hat{\mathcal{D}}]_k = \begin{bmatrix} h_k E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_k^3}{12} E & 0 \\ 0 & 0 & h_k G \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

A matriz de deformação modificada, $[\hat{\mathcal{B}}]_k$, é obtida a partir da matriz definida em (A.23), como,

$$[\hat{\mathcal{B}}]_k = \begin{bmatrix} [\mathcal{B}]_k^{MC} \\ \frac{1}{z_k} [\mathcal{B}]_k^B \\ [\mathcal{B}]_k^S \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

A.8 Campo de velocidades

O campo de velocidades de uma camada genérica k pode ser obtido a partir do respectivo campo de deslocamentos, definido na equação (A.6), por derivação em ordem ao tempo, sendo definido por,

$$\{\dot{u}\}_k = \begin{Bmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{w}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 + \frac{h_1}{2} \dot{\beta}_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \dot{\beta}_j^y + \frac{h_k}{2} \dot{\beta}_k^y + z_k \dot{\beta}_k^y \\ \dot{w}_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Recorrendo à matriz $[\mathcal{N}]$, que relaciona o campo de deslocamentos com o vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$, o campo de velocidades pode ser obtido através da multiplicação matricial,

$$\{\dot{u}\}_k = [\mathcal{N}]_k \{\dot{d}\} \quad (\text{A.32})$$

onde $\{\dot{d}\} = \{\dot{u}_0, \dot{w}_0, \dots\}$ representa a derivada no tempo do vector de deslocamentos generalizados $\{d\}$.

A.9 Energia cinética

A energia cinética de uma viga laminada é obtida através dos integrais ao longo da espessura da camada e comprimento da viga para um conjunto de camadas individuais, como,

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\dot{u}\}_k^T [\mathcal{J}]_k \{\dot{u}\}_k dz_k dx \quad (\text{A.33})$$

onde $\{\dot{u}\}_k$ representa o campo de velocidades para cada camada k , e a matriz de inércia $[\mathcal{J}]_k$ é definida por,

$$[\mathcal{J}]_k = \begin{bmatrix} \rho_k & 0 \\ 0 & \rho_k \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

sendo ρ_k a massa volúmica da camada k .

Substituindo o campo de velocidades pela relação (A.32) a expressão da energia cinética pode ser reescrita como,

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\dot{d}\}^T [\mathcal{N}]_k^T [\mathcal{J}]_k [\mathcal{N}]_k \{\dot{d}\} dz_k dx$$

que também pode ser escrita como,

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \int_{z_k} \{\dot{d}\}^T [J]_k \{\dot{d}\} dz_k dx \quad (\text{A.35})$$

sendo a matriz $[J]_k$ definida por,

$$[J]_k = [\mathcal{N}]_k^T [\mathcal{J}]_k [\mathcal{N}]_k \quad (\text{A.36})$$

Assim, calculando explicitamente o integral em ordem à espessura da camada, tem-se,

$$\Pi^C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} B \int_l \{\dot{d}\}^T [\hat{J}]_k \{\dot{d}\} dx \quad (\text{A.37})$$

sendo a matriz de inércia modificada $[\hat{J}]_k$, para $k > 1$, definida como,

$$[\hat{J}]_k = \rho_k h_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{h_1}{2} & \cdots & h_j & \cdots & \frac{h_k}{2} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \frac{h_1^2}{4} & \cdots & h_j \frac{h_1}{2} & \cdots & \frac{h_1}{2} \frac{h_k}{2} \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & h_j^2 & \cdots & h_j \frac{h_k}{2} \\ & & & & & \ddots & \\ \text{sim.} & & & & & & \frac{h_k^2}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} [0] \\ \\ \\ \\ \\ \\ [0] \end{matrix} \quad (\text{A.38})$$

A.10 Trabalho virtual das forças de superfície

Se nas faces das camadas da viga *sandwich* for aplicado uma carga transversal, $\{f\}$, o trabalho virtual δW realizado pelas forças externas é dado por,

$$\delta W = B \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx \quad (\text{A.39})$$

onde l é o comprimento da viga, B é a largura da viga e $\{\delta d\}$ é o deslocamento virtual.

A.11 Formulação variacional

O princípio de Hamilton aqui adoptado é descrito por,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi^C - \Pi^P) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (\text{A.40})$$

onde Π^C e Π^P são a energia cinética e a energia potencial do sistema, respetivamente, e δW é o trabalho virtual realizado pelas forças externas.

Introduzindo as equações (A.28), (A.37) e (A.39) na equação (A.40) e realizando a integração por partes, o princípio de Hamilton apresentado acima fica:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(- \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{J}]_k \{\ddot{d}\} dx \right. \\ & \quad - \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d\} dx \\ & \quad \left. + B \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Como a equação (A.41) deve satisfazer um vector arbitrário $\{\delta d\}$ dentro de um intervalo de tempo, t_1 a t_2 , que só pode ser verificado se os termos entre parêntesis desaparecerem ao longo do intervalo de tempo. Assim, a forma fraca pode ser expressa na notação matricial como,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{J}]_k \{\ddot{d}\} dx \\ & \quad + \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d\} dx \\ & \quad - B \int_l \{\delta d\}^T \{f\} dx = 0; \quad \forall \{\delta d\} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

A.12 Formulação do elemento finito

A formulação de elementos finitos mais utilizada opera directamente sobre o campo de deslocamentos. Este é definido dentro do elemento finito através da interpolação, usando funções interpoladoras simples, dos valores das componentes do vector de deslocamentos generalizados $\{d^e\}$, nos nós do elemento. Assim, o problema é resolvido pela resolução de um sistema de equações, no qual as incógnitas são as componentes do campo de deslocamentos generalizados presentes em cada um dos nós do domínio em análise.

A.12.1 Elemento finito de viga *layerwise*

O elemento finito proposto é um elemento isoparamétrico unidimensional com dois nós, ilustrado na figura A.3.

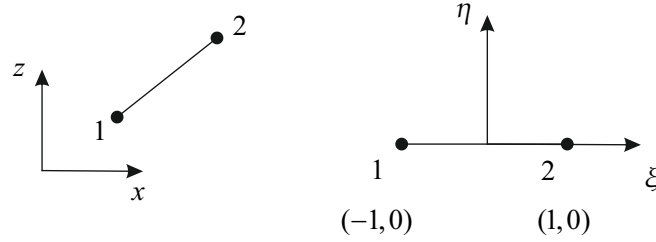


Figura A.3: Elemento isoparamétrico unidimensional - Sistema de coordenadas local e natural [12]

A viga é representada num sistema de coordenadas global (X, Z) e as matrizes de rigidez e de massa de cada elemento são calculadas em sistemas de coordenadas local (x, z) .

Antes da montagem das matrizes elementares de massa e de rigidez, definidas num sistemas de coordenadas locais (x, z) , estas são transformadas num sistemas de coordenadas naturais (ξ, η) na qual ξ é coincidente com a direção de x .

Esta transformação pode ser definida com base numa aproximação geométrica aplicando funções de interpolação,

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) x_i \\ z(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) z_i \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

onde x_i e z_i representam as coordenadas cartesianas dos nós do elemento e $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de interpolação geométrica do elemento finito, designadas por funções de forma.

Para além da geometria do elemento é também necessária a aplicação de uma interpolação às variáveis do problema. Assim, como cada nó é descrito pelas suas coordenadas nodais (x_i, z_i) e respectivo vector de graus de liberdade $\{d_i^e\} = \{u_i, w_i, \beta_{1_i}^y, \dots, \beta_{n_i}^y\}^T$, o vector de deslocamentos generalizados do elemento, $\{d^e\}$, pode ser calculado pela aplicação das funções de forma,

$$\{d^e\} = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi, \eta) \{d_i^e\} \quad (\text{A.44})$$

Funções de forma

As funções de forma são normalmente funções polinomiais simples, que devem satisfazer as condições de continuidade dentro do elemento e permitir a correta aproximação da variável interpolada.

Assim, para o elemento de 2 nós, são aplicadas funções de forma da seguinte maneira,

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (\text{A.45})$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (\text{A.46})$$

sendo N_1 a função de forma correspondente ao nó 1 e N_2 a função de forma correspondente ao nó 2 de um elemento isoparamétrico.

A.12.2 Forma fraca - Discretização do elemento finito

A forma fraca global apresentada na equação (A.42) pode ser expressa pelo somatório dos integrais das formas elementares, conduzindo à definição das matrizes e vectores lineares. Adicionando a contribuição de todos os elementos finitos n_E , a forma fraca global pode ser expressa como,

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_E} \left(\sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d^e\}^T [\hat{J}]_k \{\ddot{d}^e\} dx \right. \\ & + \sum_{k=1}^n B \int_l \{\delta d^e\}^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k \{d^e\} dx \\ & \left. - B \int_l \{\delta d^e\}^T \{f\} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

onde as variáveis generalizadas $\{d^e\}$ (e as derivadas de segunda ordem) são restritas ao domínio de integração l .

Normalmente, a relação entre os graus de liberdade elementares e globais é estabelecida através das matrizes de conectividade $[R^e]$, expressas como:

$$\{d_i^e\} = [R^e] \{d_i\} \quad (\text{A.48})$$

onde $\{d_i\}$ representa o vector global dos graus de liberdade.

Substituindo a equação (A.44) na equação (A.47), tem-se,

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_E} \left(\{\delta d_i^e\}^T \sum_{k=1}^n B \int_l [N]^T [\hat{J}]_k [N] dx \{d_i^e\} \right. \\ & + \{\delta d_i^e\}^T \sum_{k=1}^n B \int_l [N]^T [\hat{\mathcal{B}}]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [\hat{\mathcal{B}}]_k [N] dx \{d_i^e\} \\ & \left. - \{\delta d_i^e\}^T B \int_l [N]^T \{f\} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

permitindo definir a matriz de massa elementar $[M^e]$, a matriz de rigidez elementar $[K^e]$ e o vetor de forças elementar $\{f_i^e\}$, como,

$$[M^e] = \sum_{k=1}^n [M^e]_k = \sum_{k=1}^n B \int_l [N]^T [\hat{J}]_k [N] dx \quad (\text{A.50})$$

$$[K^e] = \sum_{k=1}^n [K^e]_k = \sum_{k=1}^n B \int_l [B]_k^T [\hat{\mathcal{D}}]_k [B]_k dx \quad (\text{A.51})$$

$$\{f_i^e\} = B \int_l [N]^T \{f\} dx \quad (\text{A.52})$$

onde $[B]_k$ é a matriz de deformação de uma camada genérica k do elemento finito, sendo definida como,

$$[B]_k = [\hat{B}]_k[N] \quad (\text{A.53})$$

Finalmente, as matrizes elementares de rigidez e de massa são obtidas através da soma de matrizes individuais correspondentes para cada camada da viga *sandwich* e avaliadas usando um procedimento de integração numérica de 2D.

A.13 Equações de movimento

Obtidas as matrizes de rigidez e massa elementar e o vector de forças elementar e substituindo na equação (A.49) obtém-se,

$$\{\delta d_i\}^T [M] \{\ddot{d}_i\} + \{\delta d_i\}^T [K] \{d_i\} - \{\delta d_i\}^T \{f_i\} = 0; \forall \{\delta d_i\} \quad (\text{A.54})$$

onde a matriz global de massa $[M]$, a matriz global de rigidez $[K]$ e o vector global de força $\{f_i\}$ são definidos por,

$$[M] = \sum_{e=1}^{n_E} [R^e]^T [M^e] [R^e] \quad (\text{A.55})$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_E} [R^e]^T [K^e] [R^e] \quad (\text{A.56})$$

$$\{f_i\} = \sum_{e=1}^{n_E} [R^e]^T \{f_i^e\} \quad (\text{A.57})$$

Finalmente, as equações de movimento da viga *sandwich* são dadas por,

$$[M] \{\ddot{d}_i\} + [K] \{d_i\} = \{f_i\} \quad (\text{A.58})$$

De salientar que a utilização do módulo complexo para caracterizar o material viscoelástico das camadas conduz à formação de uma matriz de rigidez que é também complexa, sendo esta constituída por uma componente real, representativa da estrutura elástica da viga *sandwich*, e por uma componente imaginária que representa as camadas viscoelásticas que dependem da temperatura e da frequência.

Apêndice B

Algoritmo G_0 G_∞ α τ - Resultados

Identificação dos parâmetros do modelo na banda de frequências compreendida entre o máximo e mínimo da parte real da função da transmissibilidade, na vizinhança da primeira ressonância, e comparação com resultados previamente obtidos [12], para os diversos provetes analisados nos pontos de medição (1), (2) e (3) - tabelas B.1, B.2, B.3

Tabela B.1: Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo G_0 G_∞ α τ para o provete P180

		G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	(1) Ref.[12]	1.010×10^5	7.478×10^7	0.696	7.365×10^{-6}
		1.010×10^5	7.480×10^7	0.696	7.370×10^{-6}
	(2) Ref.[12]	1.039×10^5	7.372×10^7	0.690	7.342×10^{-6}
		1.040×10^5	7.370×10^7	0.690	7.340×10^{-6}
	(3) Ref.[12]	1.118×10^5	7.161×10^7	0.677	6.738×10^{-6}
		9.920×10^4	6.820×10^7	0.671	6.900×10^{-6}

Tabela B.2: Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo G_0 G_∞ α τ para o provete P220

		G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P220	(1) Ref.[12]	9.184×10^4	7.426×10^7	0.694	8.203×10^{-6}
		9.180×10^4	7.430×10^7	0.694	8.200×10^{-6}
	(2) Ref.[12]	1.019×10^5	7.469×10^7	0.686	7.471×10^{-6}
		1.020×10^5	7.470×10^7	0.686	7.470×10^{-6}
	(3) Ref.[12]	9.596×10^4	5.828×10^7	0.671	9.657×10^{-6}
		9.600×10^4	5.830×10^7	0.671	9.680×10^{-6}

Tabela B.3: Parâmetros do modelo constitutivo com o algoritmo G_0 G_∞ α τ para o provete P300

		G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s	
P300	(1)	Ref.[12]	1.416×10^5	5.507×10^7	0.677	7.046×10^{-6}
			1.420×10^5	5.510×10^7	0.677	7.050×10^{-6}
	(2)	Ref.[12]	1.032×10^5	3.760×10^7	0.638	9.952×10^{-6}
			1.030×10^5	3.760×10^7	0.638	9.950×10^{-6}
	(3)	Ref.[12]	1.674×10^5	4.559×10^7	0.692	1.189×10^{-5}
			1.670×10^5	4.560×10^7	0.692	1.190×10^{-5}

Apêndice C

Algoritmos bietápicos - Resultados

Os parâmetros identificados para cada provete considerando como frequências de controlo o máximo e mínimo da parte real e máximo absoluto da parte imaginária da função transmissibilidade, são apresentados na tabela C.1 para os algoritmos de identificação $\alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$. Nas tabelas C.2 e C.3 são apresentados os resultados obtidos para o provete P220 com a alteração simultânea das estimativas dos parâmetros do modelo constitutivo do material.

Os resultados foram obtidos na vizinhança da primeira ressonância de cada provete.

Tabela C.1: Parâmetros constitutivos com modelo de optimização $\alpha \tau - G_0 G_\infty / G_\infty \alpha \tau - G_0$ - três frequências de controlo

	Provete	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
$\alpha \tau - G_0 G_\infty$	P180	9.999×10^4	1.000×10^8	0.693	4.720×10^{-6}
	P220	1.000×10^5	1.000×10^8	0.697	5.490×10^{-6}
	P300	1.000×10^5	1.000×10^8	0.623	1.576×10^{-6}
$G_\infty \alpha \tau - G_0$	P180	1.000×10^5	7.204×10^7	0.695	7.760×10^{-6}
	P220	1.000×10^5	7.635×10^7	0.699	8.210×10^{-6}
	P300	1.000×10^5	3.830×10^7	0.627	7.751×10^{-6}

Tabela C.2: Parâmetros do modelo constitutivo para o provete P220 com alteração simultânea das estimativas dos parâmetros - algoritmo de identificação α τ - G_0 G_∞

<i>Parâmetro</i>		G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
$G_0/\text{inicial}$	9×10^4	9.998×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	9×10^7				
α_{inicial}	6×10^{-1}				
τ_{inicial}	8×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	8×10^4	9.998×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	8×10^7				
α_{inicial}	7×10^{-1}				
τ_{inicial}	6×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	7×10^4	9.999×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	7×10^7				
α_{inicial}	8×10^{-1}				
τ_{inicial}	5×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	6×10^4	9.998×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	6×10^7				
α_{inicial}	5×10^{-1}				
τ_{inicial}	4×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	1.5×10^5	9.999×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	1.5×10^8				
α_{inicial}	9×10^{-1}				
τ_{inicial}	1.2×10^{-5}				
$G_0/\text{inicial}$	2×10^5	10.000×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	2×10^8				
α_{inicial}	9×10^{-1}				
τ_{inicial}	1.5×10^{-5}				
$G_0/\text{inicial}$	3×10^5	9.999×10^4	1.000×10^8	0.695	5.300×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	3×10^8				
α_{inicial}	5×10^{-1}				
τ_{inicial}	1.7×10^{-5}				

Tabela C.3: Parâmetros do modelo constitutivo para o provete P220 com alteração simultânea das estimativas dos parâmetros - algoritmo de identificação $G_\infty \alpha \tau - G_0$

<i>Parâmetro</i>		G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
$G_0/\text{inicial}$	9×10^4	9.987×10^4	6.917×10^7	0.697	9.210×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	9×10^7				
α_{inicial}	6×10^{-1}				
τ_{inicial}	8×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	8×10^4	1.000×10^5	8.969×10^7	0.696	6.240×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	8×10^7				
α_{inicial}	7×10^{-1}				
τ_{inicial}	6×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	7×10^4	9.994×10^4	1.270×10^8	0.694	3.710×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	7×10^7				
α_{inicial}	8×10^{-1}				
τ_{inicial}	5×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	6×10^4	1.000×10^5	1.441×10^8	0.694	3.080×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	6×10^7				
α_{inicial}	5×10^{-1}				
τ_{inicial}	4×10^{-6}				
$G_0/\text{inicial}$	1.5×10^5	9.999×10^4	9.040×10^7	0.696	6.160×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	1.5×10^8				
α_{inicial}	9×10^{-1}				
τ_{inicial}	1.2×10^{-5}				
$G_0/\text{inicial}$	2×10^5	1.000×10^5	4.533×10^7	0.701	1.750×10^{-5}
$G_\infty/\text{inicial}$	2×10^8				
α_{inicial}	9×10^{-1}				
τ_{inicial}	1.5×10^{-5}				
$G_0/\text{inicial}$	3×10^5	9.998×10^4	1.472×10^8	0.693	2.980×10^{-6}
$G_\infty/\text{inicial}$	3×10^8				
α_{inicial}	5×10^{-1}				
τ_{inicial}	1.7×10^{-5}				

Apêndice D

Identificação multirressonância de multifunção

D.1 Resultados

Na tabela D.1 são apresentados os parâmetros do modelo identificados considerando todas as frequências da banda compreendida entre ω_A e ω_B na vizinhança da segunda ressonância de cada provete. Os parâmetros identificados, considerando três frequências de controle na vizinhança de cada ressonância, são apresentados nas tabelas D.2 e D.3.

Tabela D.1: Parâmetros do modelo constitutivo na vizinhança da segunda ressonância - algoritmo G_0 G_∞ α τ

Provete	ω_A/Hz	ω_B/Hz	n	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	264	199	131	-2.388×10^5	9.609×10^6	0.671	1.008×10^{-4}
P220	199.75	141.5	234	-4.110×10^5	1.704×10^7	0.556	2.977×10^{-5}
P300	112.75	88	100	1.179×10^5	3.353×10^7	0.637	1.202×10^{-5}

Tabela D.2: Parâmetros do modelo constitutivo considerando três frequências de controle na vizinhança da segunda ressonância - algoritmo G_0 G_∞ α τ

Provete	ω_R/Hz	ω_A/Hz	ω_B/Hz	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	240	264	199	8.613×10^4	3.663×10^7	0.630	8.052×10^{-6}
P220	169.75	199.75	141.5	9.634×10^4	3.629×10^7	0.635	1.035×10^{-5}
P300	96.25	112.75	88	1.294×10^5	5.021×10^7	0.639	6.607×10^{-6}

Tabela D.3: Parâmetros do modelo constitutivo considerando três frequências de controle em cada ressonância (primeira e segunda ressonância) - algoritmo G_0 G_∞ α τ

Provete	G_0/Pa	G_∞/Pa	α	τ/s
P180	-2.787×10^5	1.661×10^7	0.554	3.461×10^{-5}
P220	-1.014×10^5	2.679×10^7	0.593	1.917×10^{-5}
P300	1.615×10^5	6.251×10^7	0.703	7.481×10^{-6}

Bibliografia

- [1] J. Lopes. Modeling of Dynamic Behaviour of Laminate Structures with Cork Compounds. Master's thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2008.
- [2] R.A.S. Moreira. *Modelação e análise de tratamentos viscoelásticos multi-camada para controlo passivo de vibrações*. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2004.
- [3] D. I. G. Jones. *Handbook of viscoelastic vibration damping*. John Wiley, Chichester; New York, 2001.
- [4] R. Moreira and Rodrigues J. D. Constrained damping layer treatments: Finite element modeling. *Journal of Sound and Vibration*, 10:575–595, 2003.
- [5] Jorge Miguel Ferreira Martins Coelho. Controlo Passivo de Vibrações de uma Serra Circular por Aplicação de Tratamentos Viscoelásticos: Modelação e Análise. Master's thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2011.
- [6] ASTM E756-05. Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials, 2010.
- [7] Hasan Koruk and Kenan Y. Sanliturk. Identification and removal of adverse effects of non-contact electromagnetic excitation in oberst beam test method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30(0):274 – 295, 2012.
- [8] S. Y. Kim and D. H. Lee. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs. *Journal of Sound and Vibration*, 324(3-5):570–586, 2009.
- [9] Marco Matter, Thomas Gmür, Joël Cugnoni, and Alain Schorderet. Identification of the elastic and damping properties in sandwich structures with a low core-to-skin stiffness ratio. *Composite Structures*, 93:331–341, 2011.
- [10] Marco Matter, Thomas Gmür, Joël Cugnoni, and Alain Schorderet. Numerical-experimental identification of the elastic and damping properties in composite plates. *Composite Structures*, 90:180–187, 2009.
- [11] Michaël Schwaar, Thomas Gmür, and Jeannot Frieden. Modal numerical-experimental identification method for characterising the elastic and damping properties in sandwich structures with a relatively stiff core. *Composite Structures*, 94:2227–2236, 2012.
- [12] Mariana Ascensão. Identificação de propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos por um método inverso baseado em EF e FRF. Master's thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2012.

- [13] A. D. Nashif, D. I. G. Jones, and J. P. Henderson. *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, Ltd., 1985.
- [14] 3M. Scotchdamp Vibration Control Systems: Product information and performance data. Technical report, 3M Industrial Tape and Specialties Divison, St. Paul, Minnesota, US, 1993.
- [15] T. Pritz. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 195(1):103–115, 1996.
- [16] T. Pritz. Loss factor peak of viscoelastic materials: Magnitude to width relations. *Journal of Sound and Vibration*, 246(2):265–280, 2001.
- [17] Robert C. Sapri. *Mechanical Vibrations: Measurement, Effects and Control*. Nova Science Publishers, 2009.
- [18] R.A.S. Moreira, J.D. Corte-Real, and J. Dias Rodrigues. A generalized frequency-temperature viscoelastic model. *Shock and Vibration*, 17(4):407:418, 2010.
- [19] M. Martinez-Agirre and M. J. Elejabarrieta. Dynamic characterization of high damping viscoelastic materials from vibration test data. *Journal of Sound and Vibration*, 330(16): 3930–3943, 2011.
- [20] R. A. S. Moreira, J. D. Rodrigues, and A. J. M. Ferreira. A generalized layerwise finite element for multi-layer damping treatments. *Computational Mechanics*, 37(5):426–444, 2006.